Trigonometri dan Beberapa Terapannya dalam Keislaman: Disertai Contoh Penggunaan Aplikasi Matematika

by Abdillah Abdillah

Submission date: 20-May-2022 02:38PM (UTC+0700)
Submission ID: 1840461849
File name: Trigonometri_Lengkap-Ok.pdf (3.34M)
Word count: 29110
Character count: 121786

Buku merupakan ini referensi yang dirancang bagi para mahasiswa, guru, dosen atau akademisi lainnya untuk memahami berbagai konten Trigonometri. Adapun cakupan konten Trigonometri dalam buku in adalah Bab I Fungsi trigonometri: perbandingan, fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut yang berelasi, menghitung nilai fungsi trigonometri; Bab II Identitas trigonometri: Rumus-rumus yang menghubungkan cos A, sin A, tan A, cot A, sec A, cosec A, rumus jumlah dan selisih dua sudu cosinus dan sinus; Bab III Penerapan trigonometri: Penerapan trigonometri pada segitiga siku-siku, segitiga sembarang, aturan cosinus, aturan sinus, aturan tangen, luas segitiga; Bab IV Persamaan trigonometri: Penyelesaian umum, persamaan yang mengandung jumlah cosinus atau sinus, persamaan kuadrat dalam cosinus, sinus dan tangen, persamaan berbentuk dua persamaan dengan dua variabel; Bab V Pertidaksamaan Trigonometri; Bab VI Ekstrim fungsi trigonometri dan ekstrim dengan syarat: Ekstrim fungsi trigonometri, ekstrim dengan syarat; Bab VII Grafik fungsi trigonometri; Bab VIII Fungsi siklometri: Pengertian fungsi siklometri, grafik fungsi siklometri, identitas fungsi siklometri; Bab IX Limit fungsi trigonometri; Bab X Bilangan kompleks: Representasi trigonometri dari suatu bilangan kompleks, perkalian dan pembagian bilangan kompleks; Kontribusi Al-Tusi dan Al-Battani dalam trigonometri, orang-orang arab mengumpulkan pengetahuan dari dunia yang dikenal india: sinus, cosinus, dan tangen; Trigonometri dalam peradaban arab. Selanjutnya, sebagai bentuk *up to date* keilmuan, maka buku ini dilengkapi dengan contoh Penggunaan Aplikasi Matematika GeoGebra dalam menggambar beberapa Grafik Fungsi Trigonometri.

ISBN 978-623-6830-61-1

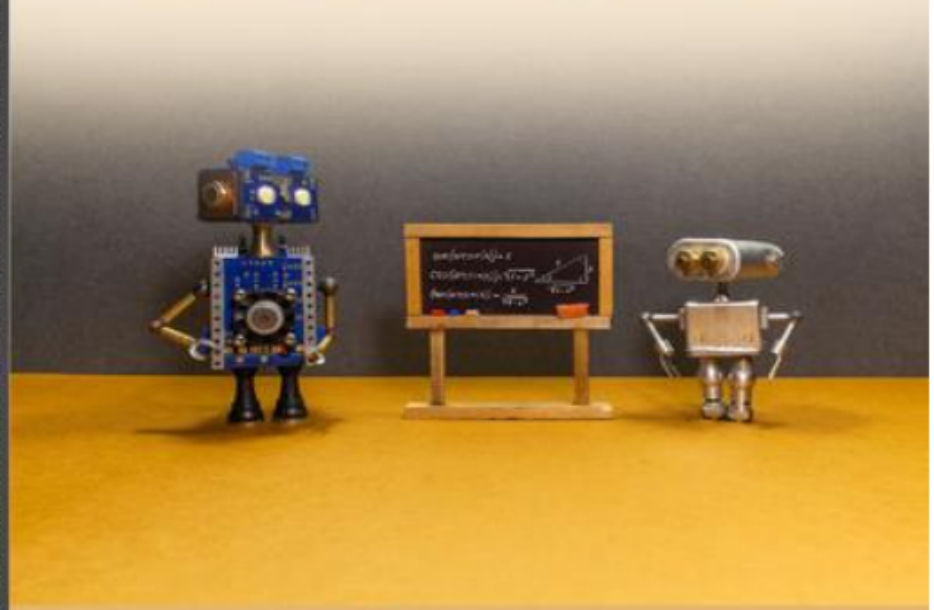
TRIGONOMETRI DAN BEBERAPA PENERAPANNYA DALAM KEISLAMAN: DISERTASI CONTOH PENGGUNAAN APLIKASI MATEMATIKA

Abdillah

TRIGONOMETRI

DAN BEBERAPA TERAPANNYA DALAM KEISLAMAN:

DISERTASI CONTOH PENGGUNAAN APLIKASI MATEMATIKA



DITERBITKAN OLEH
LP2M IAIN AMBON 2022

TRIGONOMETRI DAN BEBERAPA TERAPANNYA DALAM KEISLAMAN: Disertai Contoh Penggunaan Aplikasi Matematika

Abdillah

LP2M IAIN AMBON

Penerbit:

TRIGONOMETRI DAN BEBERAPA TERAPANNYA DALAM KEISLAMAN: Disertai Contoh Penggunaan Aplikasi Matematika

Abdillah

Editor: Ajeng Gelora Mastuti
Penyunting: Tim LP2M IAIN Ambon
Desain Sampul dan Tata Letak: Saddam Husein
Diterbitkan oleh:
LP2M IAIN Ambon
Jl. H. Tarmidzi Taher Kebun Cengkeh Batumerah Atas
Ambon 97128
Telp. (0911) 344816
Handpone 081311111529
Faks. (0911) 344315
e-mail: lp2m@iainambon.ac.id
www.lp2miainambon.id

Cetakan Pertama, Mei 2022

Hak cipta yang dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa ijin tertulis dari penerbit

ISBN: 978-623-6830-61-1

KATA PENGANTAR

اسلام عليكم و رحمة الله و بر كا ته

Allah Swt. adalah dzat, tempat kita senantiasa memanjatkan puji dan syukur. Dengan segala berkah dan rahmat-Nya sehingga aktivitas akademik masih dapat kita jalani. Rasulullah Saw adalah tauladan kita, menjadi junjungan yang senantiasa kita bershalawat kepadanya, beserta para sahabat dan seluruh manusia di bumi ini yang masih ridha menuntut ilmu-ilmu keislaman dan kemaslahatan dunia untuk mendapat rahmat dan derajat yang tinggi di sisi Allah Swt.

Buku merupakan ini referensi yang dirancang bagi para mahasiswa, guru, dosen atau akademisi lainnya untuk memahami konten Trigonometri. Adapun cakupan konten trigonometri dalam buku in adalah Trigonometri, Persamaan Trigonometri, Pertidaksamaan Trigonometri, Ekstrim Fungsi Trigonometri Dan Ekstrim Dengan Syarat, Grafik Fungsi Trigonometri, Fungsi Siklometri, Limit Fungsi Trigonometri, Bilangan Kompleks. Disamping itu, diulas pula tentang beberapa sejarah dan terapan Trigonometri dalam keislaman. Sebagai bentuk *up to date* keilmuan, maka buku ini dilengkapi dengan contoh Penggunaan Aplikasi Matematika **GeoGebra** dalam menggambar beberapa Grafik Fungsi Trigonometri.

Kami sadar bahwa buku pembahasan Trigonometri dan Beberapa Terapannya dalam Keislaman: Disertai Contoh Penggunaan Aplikasi Matematika belum sempurna, sehingga kami berharap adanya masukan dari pihak-pihak pembaca manapun agar menjadi usaha kami untuk menyempurnakan buku ini pada edisi berikutnya. Terakhir kami haturkan terima kasih kepada pihak-pihak yang turut membantu dalam penyelesaian buku ini.

وسلام عليكم ورحمة ا لله وبر كا ته

Ambon, Desember 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

SAMPUL..... i

Judul:..... ii

Penerbit: iii

KATA PENGANTAR iv

DAFTAR ISI v

BAB I

FUNGSI TRIGONOMETRI 1

A. Perbandingan Trigonometri 1

B. Fungsi-Fungsi Trigonometri untuk Sudut yang Berelasi 9

C. Menghitung Nilai Fungsi Trigonometri 14

LATIHAN SOAL 18

BAB II

IDENTITAS TRIGONOMETRI..... 20

A. Rumus-rumus yang Menghubungkan Cos A, Sin A, Tan A, dan Cot A 20

B. Rumus-rumus yang Menghubungkan Tan A, Cot A, Sec A, Cosec A 23

C. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut..... 25

D. Rumus Hasil kali, Jumlah dan Selisih Cosinus dan Sinus 34

1. Rumus Hasil Kali Cosinus dan Sinus 34

2. Rumus Jumlah dan Selisih Cosinus dan Sinus..... 36

LATIHAN SOAL..... 41

BAB III

PENERAPAN TRIGONOMETRI 47

A. Penerapan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku 47
B. Penerapan Trigonometri Pada Segitiga Sembarang 56
1. Aturan Cosinus 56
2. Aturan Sinus 60
3. Aturan Tangen 65
4. Luas Segitiga 69
LATIHAN SOAL 73
BAB IV
PERSAMAAN TRIGONOMETRI 77
A. Penyelesaian Umum 77
B. Persamaan Yang Mengandung Jumlah Cosinus Atau Sinus 79
C. Persamaan Kuadrat Dalam Cosinus, Sinus Dan Tangen 84
D. Persamaan Berbentuk $a\cos x^0 + b\sin x^0 = c$ 88
E. Dua Persamaan Dengan Dua Variabel 93
LATIHAN SOAL 98
BAB V
PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI 102
LATIHAN SOAL! 115
BAB VI
EKSTRIM FUNGSI TRIGONOMETRI DAN EKSTRIM DENGAN SYARAT .. 117
A. Ekstrim Fungsi Trigonometri 117
B. Ekstrim dengan Syarat 127
LATIHAN SOAL 131
BAB VII

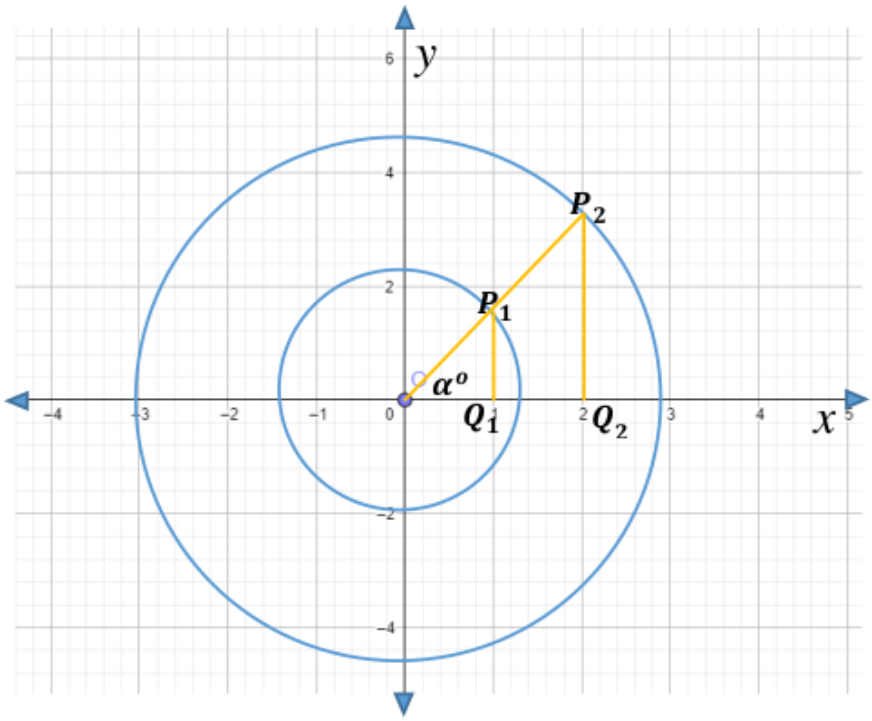
GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI 134
LATIHAN SOAL 144
BAB VIII
FUNGSI SIKLOMETRI 146
A. Pengertian Fungsi Siklometri 146
B. Grafik Fungsi Siklometri 149
C. Identitas Fungsi Siklometri 151
LATIHAN SOAL 155
BAB IX
LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI 158
LATIHAN SOAL 167
BAB X
BILANGAN KOMPLEKS 169
A. Representasi Trigonometri dari suatu Bilangan Kompleks 169
B. Perkalian dan Pembagian Bilangan Kompleks 173
LATIHAN SOAL 179
LATIHAN SOAL 187
BAB XI
KONTRIBUSI AL-TUSI DAN AL-BATTANI DALAM TRIGONOMETRI 189
BAB XII
ORANG-ORANG ARAB MENGUMPULKAN PENGETAHUAN DARI DUNIA YANG DIKENAL 195
BAB XIII
INDIA: SINUS, COSINUS, DAN TANGEN 197
BAB XIV

TRIGONOMETRI DALAM PERADABAN ARAB 200
DAFTAR PUSTAKA..... 208

BAB I
FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Perbandingan Trigonometri

Mengawali pembahasan fungsi trigonometri ini, coba perhatikan Gambar 1 berikut!



Gambar 1

Secara geometri, segitiga OP_1Q_1 sebangun dengan segitiga OP_2Q_2, sehingga:

$$\frac{OQ_1}{OP_1} = \frac{OQ_2}{OP_2} = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$$

$$\frac{P_1Q_1}{OP_1} = \frac{P_2Q_2}{OP_2} = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}$$

$$\frac{P_1Q_1}{OQ_1} = \frac{P_2Q_2}{OQ_2} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\frac{OQ_1}{P_1Q_1} = \frac{OQ_2}{P_2Q_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$$\frac{OP_1}{OQ_1} = \frac{OP_2}{OQ_2} = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r_2}{x_2}$$

$$\frac{OP_1}{P_1Q_1} = \frac{OP_2}{P_2Q_2} = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r_2}{y_2}$$

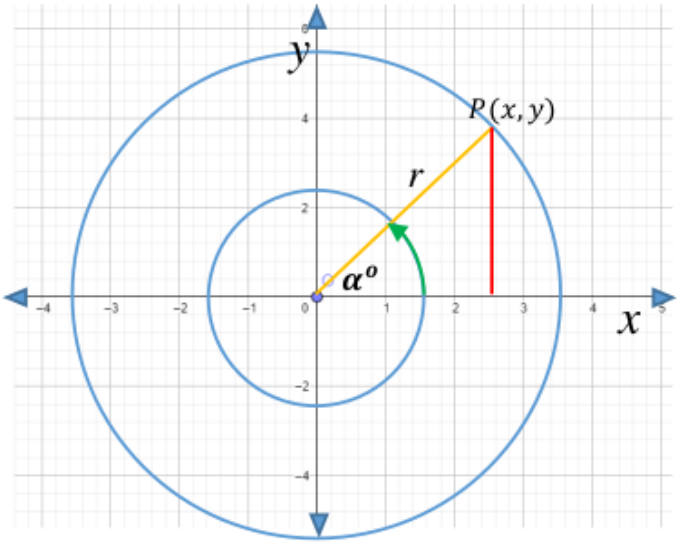
Perbandingan-perbandingan tersebut di atas, dinamakan perbandingan goniometri dari sudut $\alpha°$. Nilai-nilai perbandingan ini adalah nilai-nilai dari fungsi-fungsi:

$Cosinus\ \alpha°, Sinus\ \alpha°, Cotangen\ \alpha°, Secan\ \alpha°,$ dan $Cosecan\ \alpha°$

dengan demikian fungsi-fungsi trigoometri dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi:

Jika titik $P(x, y)$ terletak pada lingkaran dengan titik pusat pada O, jari-jari r sedemikian hingga $\angle XOP = \alpha^0$, seperti tampak pada gambar 2, maka:



Gambar 2

$$\cos\alpha^0 = \frac{x}{r}$$

$$\sin\alpha^0 = \frac{y}{r}$$

$$\tan\alpha^0 = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha^0 = \frac{x}{y}$$

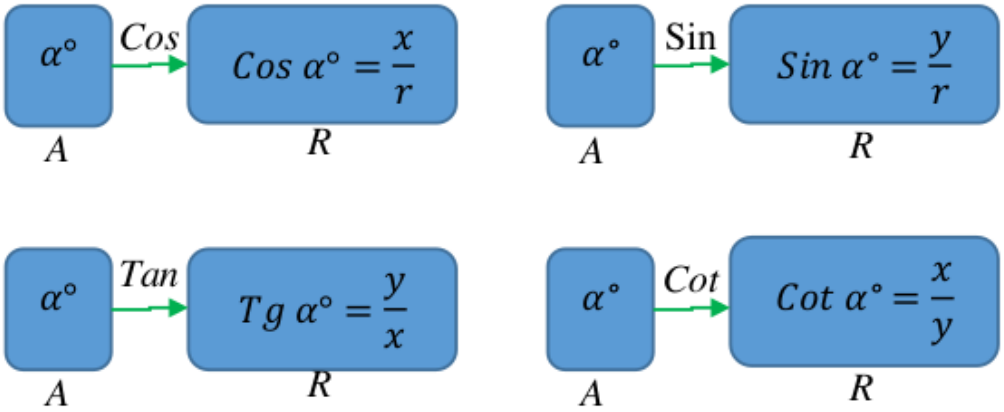
$$\sec\alpha^0 = \frac{r}{x}$$

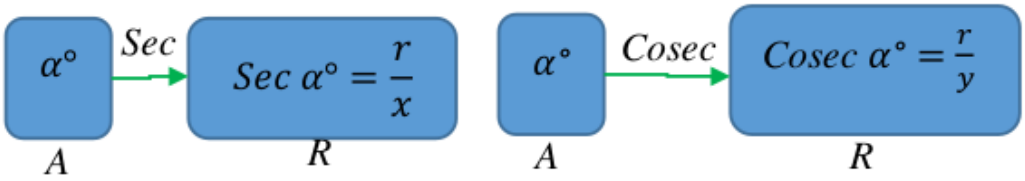
$$\csc\alpha^0 = \frac{r}{y}$$

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa untuk setiap sudut yang besarnya $\alpha°$, ada satu dan hanya satu nilai:

$$Cosinus\ \alpha°, Sinus\ \alpha°, Cotangen\ \alpha°, Secan\ \alpha°, \text{dan}\ Cosecan\ \alpha°$$

Jadi kita mempunyai pemetaan himpunan sudut $A = \left\{\frac{a°}{a} \in R\right\}$ ke himpunan bilangan nyata *R* seperti ditunjukkan diagram berikut ini.





Gambar 3

Dikatakan bahwa fungsi-fungsi **Cosinus, Sinus, Tangen, Cotangen, Secan, Dan Cosecan** memetakan himpunan sudut ke himpunan bilangan nyata.

Selanjutnya, karena titik *P* dapat terletak pada setiap kuadran, maka koordinat *x* dan *y* dari titik *P* dapat positif, negatif, atau nol. Misalkan titik *P* terletak di kuadran III, maka koordinat *x* dan *y* masing-masing negatif, sehingga nilai **Cosinus, Sinus, Tangen, Cotangen, Secan, Dan Cosecan** dari sudut *XOP* adalah negatif, sedangkan nilai Tangen dan Cotangen adalah positif.

Berikut ini diperlihatkan tanda dari nilai-nilai fungsi trigonometri dalam setiap kuadran.

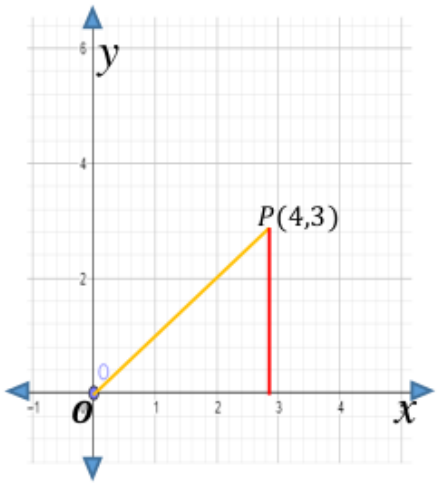
Tabel 1 Tanda nilai-nilai fungsi trigonometri

Daerah	$\cos\alpha^0$	$\sin\alpha^0$	$\tan\alpha^0$	$\sec\alpha^0$	$\csc\alpha^0$	$\cot\alpha^0$
$0^0 < \alpha < 90^0$	+	+	+	+	+	+
$90^0 < \alpha < 180^0$	-	+	-	-	+	-
$180^0 < \alpha < 270^0$	-	-	+	-	-	+
$270^0 < \alpha < 360^0$	+	-	-	+	-	-

Contoh 1

Tulislah semua perbandingan trigonometri dari sudut α^0, dimana α^0 adalah besarnya $\angle XOP$, dan *P* adalah titik $(4,3)$.

Jawab:



Gambar 4

Perhatikan Gambar 4 di atas, terlihat bahwa $\angle XOP = \alpha^0$ dan *OP* = *r*.

Menurut dalil Phytagoras,

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Maka

$$r^2 = (4)^2 + (3)^2$$
$$= 16 + 9 = 25$$
$$r = 5$$

Jadi,

$$\cos\alpha^0 = \frac{x}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha^0 = \frac{y}{x} = \frac{3}{4} \qquad \sec\alpha^0 = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$

$$\sin\alpha^0 = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \qquad \cot\alpha^0 = \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \qquad \csc\alpha^0 = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

Contoh 2

Tanpa menggunakan gambar tentukanlah semua nilai fungsi trigonometri dari sudut α^0, dimana α^0 adalah besarnya $\angle XOA$, dan A adalah titik $(6,-8)$

Jawab:

Diketahui; $x = 6$, $y = -8$

Menurut dalil Phytagoras,

$$r^2 = (6)^2 + (-8)^2$$

$$= 36 + 64 = 100$$

$$r = 10$$

Jadi,

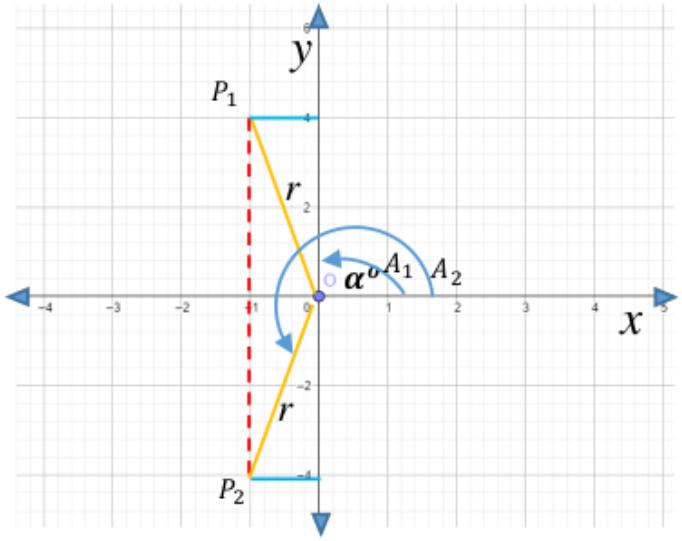
$$\cos\alpha^0 = \frac{x}{r} = \frac{6}{10} \qquad \tan\alpha^0 = \frac{y}{x} = \frac{-8}{6} \qquad \sec\alpha^0 = \frac{r}{x} = \frac{10}{6}$$

$$\sin\alpha^0 = \frac{y}{r} = \frac{-8}{10} \qquad \cot\alpha^0 = \frac{x}{y} = \frac{6}{-8} \qquad \csc\alpha^0 = \frac{r}{y} = \frac{10}{-8}$$

Contoh 3

Jika $\cos A = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, tentukan nilai semua fungsi trigonometri dari sudut *A*.

Jawab:



Gambar 5

Karena $\cos A = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, maka sudut *A* terletak dikuadran II atau III. Sehingga $x = -1$, $r = \sqrt{5}$. Maka, $\left(\sqrt{5}\right)^2 = (-1)^2 + y^2$, atau $y = \pm 2$ (lihat gambar 6).

Jadi,

$\cos A_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\cos A_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin A_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\sin A_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\tan A_1 = \frac{2}{-1} = -2$ $\qquad$ $\tan A_2 = \frac{-2}{-1} = 2$

$\cot A_1 = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $\cot A_2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

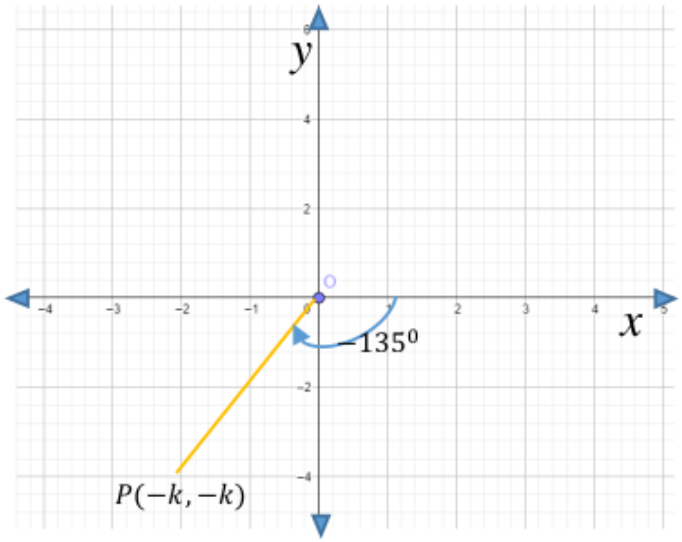
$\sec A_1 = \frac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sec A_2 = \frac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}$

$\csc A_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $\csc A_2 = \frac{\sqrt{5}}{-2}$

Contoh 4

Tentukan perbandingan-perbandingan trigonometri dari sudut -135^0.

Jawab:



Gambar 6

Sudut -135^0 dapat digambarkan dengan posisi seperti pada gambar 6.

P adalah titik $(-k,-k)$ merupakan garis bagi kuadran III. Dengan demikian,

$r^2 = (-k)^2 + (-k)^2 = 2k^2$ atau $r = k\sqrt{2}$. Jadi,

$$\cos(-135)^0 = \frac{-k}{k\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-135)^0 = \frac{-k}{k\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(-135)^0 = \frac{-k}{-k} = 1$$

$$\cot(-135)^0 = \frac{-k}{-k} = 1$$

$$\sec(-135)^0 = \frac{k\sqrt{2}}{-k} = -\sqrt{2}$$

$$\csc(-135)^0 = \frac{k\sqrt{2}}{-k} = -\sqrt{2}$$

B. Fungsi-Fungsi Trigonometri untuk Sudut yang Berelasi

a. Sudut α^0 dan $(180-\alpha)^0$

$$\cos(180-\alpha)^0 = -\cos\alpha^0$$

$$\sin(180-\alpha)^0 = \sin\alpha^0$$

$$\tan(180-\alpha)^0 = -\tan\alpha^0$$

$$\cot(180-\alpha)^0 = -\cot\alpha^0$$

$$\sec(180-\alpha)^0 = -\sec\alpha^0$$

$$\csc(180-\alpha)^0 = \csc\alpha^0$$

<u>Contoh 1</u>

Nyatakan fungsi-fungsi berikut ini kedalam fungsi sudut lancip

a) $\cos 150^0$ c) $\tan 135^0$ e) $\sec\frac{5}{6}\pi$

b) $\sin 120^0$ d) $\cot\frac{2}{3}\pi$ f) $\csc\frac{3}{4}\pi$

Jawab:

a) Sudut $150^0 = (180-30)^0$, sehingga $\cos 150^0 = \cos(180-30)^0$.

Berdasarkan rumus $\cos(180-\alpha)^0 = -\cos\alpha^0$, maka

$\cos(180-30)^0 = -\cos 30^0$. Jadi,

$\cos 150^0 = \cos(180-30)^0 = -\cos 30^0$

b) $\sin 120^0 = \sin(180-60)^0$

Berdasarkan rumus $\sin(180-\alpha)^0 = \sin\alpha^0$. Maka,

$\sin(180-60)^0 = \sin 60^0$. Jadi $\sin 120^0 = \sin(180-60)^0 = \sin 60^0$

c) $\tan 135^0 = \tan(180-45)^0$

Berdasarkan rumus $\tan(180-\alpha)^0 = -\tan\alpha^0$, maka

$\tan(180-45)^0 = -\tan 45^0$. Jadi,

$\tan 135^0 = \tan(180-45)^0 = -\tan 45^0$

d) Sudut $\frac{2}{3}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi$. Maka $\cot\frac{2}{3}\pi = \cot\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right)$, sedangkan

$\cot\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cot\frac{1}{3}\pi$, ingat rumus $\cot(180-\alpha)^0 = -\cot\alpha^0$.

Jadi, $\cot\frac{2}{3}\pi = \cot\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cot\frac{1}{3}\pi$.

e) $\sec\frac{5}{6}\pi = \sec\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right)$. Menurut rumus $\sec(180-\alpha)^0 = -\sec\alpha^0$.

Maka, $\sec\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\sec\frac{1}{6}\pi$. Jadi

$\sec\frac{5}{6}\pi = \sec\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sec\frac{1}{6}\pi$.

f) $\csc\frac{3}{4}\pi = \csc\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$. Menurut rumus $\csc(180-\alpha)^0 = \csc\alpha^0$.

Maka, $\csc\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \csc\frac{1}{4}\pi$. Jadi, $\csc\frac{3}{4}\pi = \csc\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\csc$

b. Sudut α^0 dan $(-\alpha)^0$

$\cos(-\alpha)^0 = \cos\alpha^0$

$\sin(-\alpha)^0 = -\sin\alpha^0$

$\tan(-\alpha)^0 = -\tan\alpha^0$

$\cot(-\alpha)^0 = -\cot\alpha^0$

$\sec(-\alpha)^0 = \sec\alpha^0$

$\csc(-\alpha)^0 = -\csc\alpha^0$

<u>Contoh 2</u>

Nyatakan fungsi-fungsi berikut kedalam fungsi sudut lancip.

a) $\cos(-45)^0$ c) $\tan(-150)^0$ e) $\sec\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$

b) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ d) $\cot(-30)^0$ f) $\csc\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

Jawab:

a) $\cos(-45)^0 = \cos 45^0$

b) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\frac{2}{3}\pi$.

Selanjutnya, $\sin\frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right)$ dan $\sin\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\frac{1}{3}\pi$.

Jadi,

$$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\frac{1}{3}\pi$$

c) $\tan\left(-150\right)^0 = -\tan 150^0$.

Selanjutnya $\tan 150^0 = \tan\left(180 - 30\right)^0 = -\tan 30^0$.

Jadi,

$$\tan\left(-150\right)^0 = -\tan\left(180 - 30\right)^0 = -\left(-\tan 30^0\right) = \tan 30^0$$

d) $\cot\left(-30\right)^0 = -\cot 30^0$

e) $\sec\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \sec\frac{1}{4}\pi$

f) $\csc\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\csc\frac{3}{4}\pi$.

Selanjutnya, $\csc\frac{3}{4}\pi = \csc\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \csc\frac{1}{4}\pi$. Jadi,

$$\csc\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\csc\frac{3}{4}\pi = -\csc\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\csc\frac{1}{4}\pi$$

c. Sudut α^0 dan $\left(90 - \alpha\right)^0$

a. $\cos(90-\alpha)^0 = \sin\alpha^0$

b. $\sin(90-\alpha)^0 = \cos\alpha^0$

c. $\tan(90-\alpha)^0 = \cot\alpha^0$

d. $\cot(90-\alpha)^0 = \tan\alpha^0$

e. $\sec(90-\alpha)^0 = \csc\alpha^0$

f. $\csc(90-\alpha)^0 = \sec\alpha^0$

Contoh 3

Sederhanakan soal-soal berikut ini.

a) $\dfrac{\cos(90-\alpha)^0}{\sin(90-\alpha)^0}$

b) $\dfrac{\tan\alpha^0}{\cot(90-\alpha)^0}$

c) $\dfrac{\cos(90-\alpha)^0}{\sin(-\alpha)^0}$

d) $\dfrac{\sin(90-\alpha)^0\sin\alpha^0}{\cos(90-\alpha)^0}$

Jawab:

a) $\dfrac{\cos(90-\alpha)^0}{\sin(90-\alpha)^0} = \dfrac{\sin\alpha^0}{\cos\alpha^0} = \tan\alpha^0$

b) $\dfrac{\tan\alpha^0}{\cot(90-\alpha)^0} = \dfrac{\tan\alpha^0}{\tan\alpha^0} = 1$

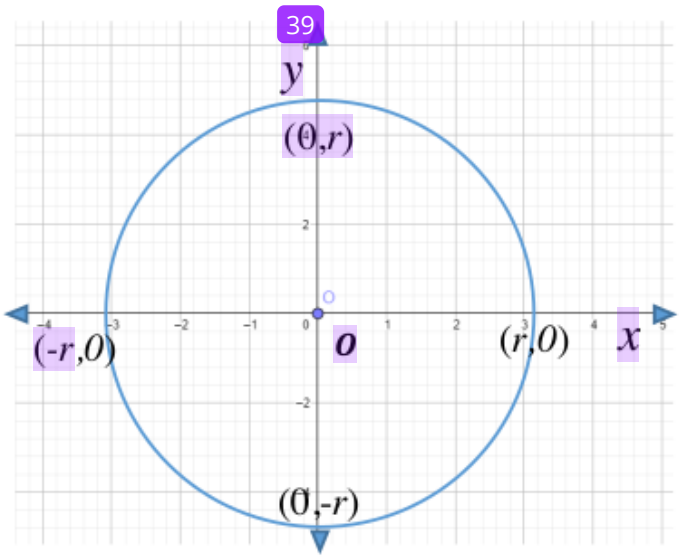
c) $\dfrac{\cos(90-\alpha)^0}{\sin(-\alpha)^0} = \dfrac{\sin\alpha^0}{-\sin\alpha^0} = -1$

d) $\dfrac{\sin(90-\alpha)^0\sin\alpha^0}{\cos(90-\alpha)^0} = \dfrac{\cos\alpha^0\sin\alpha^0}{\sin\alpha^0} = \cos\alpha^0$

C. Menghitung Nilai Fungsi Trigonometri

Nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut: $0^{o}, 90^{o}, 180^{o}, 270^{o}$ dapat dihitung dengan menggunakan konsep kuadran seperti pada pembahasan sebelumnya.

Jika $P(x, y)$ adalah suatu titik yang terletak pada sisi batas setiap kuadran, maka koordinat titik P itu adalah $(r, 0), (0, r), (-r, 0), (0, -r)$, seprti tampak pada gambar 7.



Gambar 7

<u>Contoh 1</u>

Tentukan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut 150^{0}.

Jawab:

$150^{0} = (180 - 30)^{0}$, sehingga;

$$\cos 150^0 = \cos(180-30)^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 150^0 = \sin(180-30)^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$\tan 150^0 = \tan(180-30)^0 = -\tan 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 150^0 = \cot(180-30)^0 = -\cot 30^0 = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^0 = \sec(180-30)^0 = -\sec 30^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 150^0 = \csc(180-30)^0 = \csc 30^0 = 2$$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut $\frac{5}{2}\pi$.

Jawab:

$\frac{5}{2}\pi = 2\pi + \frac{1}{2}\pi$. Sehingga;

123

$$\cos\frac{5}{2}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$$

$$\sin\frac{5}{2}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$$

$$\tan\frac{5}{2}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \tan\frac{1}{2}\pi = tidak\,terdefinisi$$

$$\cot\frac{5}{2}\pi = \cot\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \cot\frac{1}{2}\pi = 0$$

$$\sec\frac{5}{2}\pi = \sec\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sec\frac{1}{2}\pi = tidak\ terdefinisi$$

$$\csc\frac{5}{2}\pi = \csc\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \csc\frac{1}{2}\pi = 1$$

<u>Contoh 3</u>

Tentukan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut $\frac{13}{6}\pi$.

Jawab:

$\frac{13}{6}\pi = 2\pi + \frac{1}{6}\pi$. Sehingga;

$$\cos\frac{13}{6}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{13}{6}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{13}{6}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{13}{6}\pi = \cot\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \cot\frac{1}{6}\pi = \sqrt{3}$$

$$\sec\frac{13}{6}\pi = \sec\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \sec\frac{1}{6}\pi = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\frac{13}{6}\pi = \csc\left(2\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \csc\frac{1}{6}\pi = 2$$

LATIHAN SOAL

1. Buatlah sketsa dari titik-titik di bawah ini, kemudian tentukan semua nilai fungsi trigonometri dari sudut α^0, dimana α^0 adalah besarnya $\angle XOA, \angle XOB, \angle XOC$, dan $\angle XOD$:

   a. $A(4,-3)$ c. $C(-4,-3)$

   b. $B(-4,3)$ d. $D(6,7)$

2. Jika $\sin A = \frac{-1}{2}$ tentukan perbandingan-perbandingan trigonometri dari sudut *A* tersebut!

3. Tentukan semua perbandingan trigonometri dari sudut $\frac{7}{6}\pi$.

4. Tulislah tanda (+ atau -) dari soal-soal berikut ini.

   a. $\sin 400^0$ e. $\cos 210^0$ i. $\tan 580^0$

   b. $\sin 125^0$ f. $\cos 160^0$ j. $\cot 225^0$

   c. $\sin 250^0$ g. $\cos 320^0$ k. $\sec 210^0$

   d. $\sin 310^0$ h. $\cos 390^0$ l. $\csc 13/6\pi$

5. Jika $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, θ terletak dikuadran II. Tentukan semua nilai perbandingan trigonometri dari sudut θ itu.

6. Sederhanakan soal-soal berikut ini!

   a. $\frac{\sin(180-\alpha)^0}{\cos(180-\alpha)^0}$ c. $\cos^2\alpha^0 + \cos^2(90-\alpha)^0$

   b. $\sin^2(-\alpha)^0 + \cos^2(-\alpha)^0$ d. $\cot(\pi-\alpha) + \cot\alpha$

7. Jika $\sin(-\theta)^0 = \frac{1}{2}$, tentukan nilai dari semua fungsi trigonometri dari sudut θ.

8. Jika $\cos(-\theta)^0 = -\frac{1}{2}$, tentukan nilai dari semua fungsi trigonometri dari sudut θ.

9. Tentukan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut di bawah ini

   a. 315^0 c. 540^0 e. $\frac{5}{6}\pi$ g. $\frac{7}{2}\pi$

   b. 240^0 d. -300^0 f. $\frac{-3}{4}\pi$ h. $\frac{-3}{2}\pi$

10. Diantara pernyataan-pernyataan berikut ini manakah yang benar dan manakah yang salah, untuk $0 \le x \le 360$.

    a. Jika $\cos x^0 = 0,5$ maka $x = 60$ atau 300

    b. Jika $\sin x^0 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ maka $x = 45$ atau 315

    c. Jika $\tan x^0 = 1$ maka $x = 45$ atau 225

BAB II
IDENTITAS TRIGONOMETRI

Ada perbedaan antara identitas dengan persamaan. Perbedaan itu dapat dilihat pada contoh-contoh berikut;

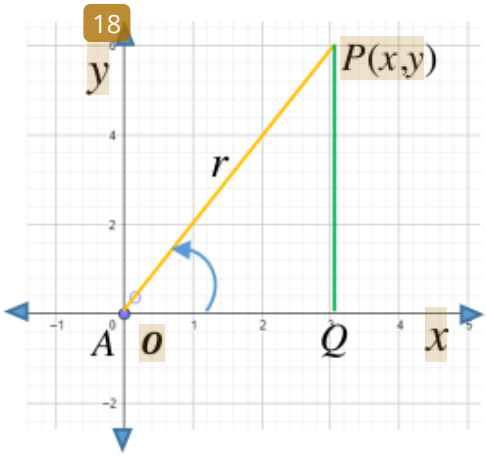
Identitas : $2a + 3a = 5a$, berlaku untuk semua harga *a*.

Persamaan : $x^2 - x - 2 = 0$, hanya berlaku untuk $x = -1$ dan $x = 2$.

Identitas dapat diartikan sebagai kesamaan. Untuk dapat dinyatakan sebagai kesamaan, perlu ada pembuktian dan untuk pembuktian diperlukan rumus-rumus.

A. Rumus-rumus yang Menghubungkan Cos A, Sin A, Tan A, dan Cot A

Pada gambar 8, *PQ* tegak lurus *OQ*. Titik sudut *A* berimpit pada titik pangkal *O*.



Gambar 8

Menurut dalil Phytagoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Selanjutnya,

$$\cos A = \frac{x}{r} \rightarrow \cos^2 A = \frac{x^2}{r^2}$$

$$\sin A = \frac{y}{r} \rightarrow \sin^2 A = \frac{y^2}{r^2}$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Jadi, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

Seterusnya diperoleh bahwa:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A, \text{ dan } \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$$

Contoh 1

Buktikan identitas berikut ini:

a. $3\cos^2 A + 3\sin^2 A = 3$

b. $(\cos A + \sin A)^2 - 2\cos A \sin A = 1$

Bukti:

a. $3\cos^2 A + 3\sin^2 A = 3(\cos^2 A + \sin^2 A) = 3(1) = 3$, terbukti.

b. $(\cos A + \sin A)^2 - 2\cos A \sin A =$

$\cos^2 A + \sin^2 A + 2\cos A \sin A - 2\cos A \sin A = \cos^2 A + \sin^2 A = 1$, terbukti.

Contoh 2

Buktikan bahwa;

a. $\dfrac{1 - \cos^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$

b. $(1 - \sin^2 A)\tan^2 A = \sin^2 A$

Bukti:

a. $\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A} = \ldots$

Pembilang, $1-\cos^2 A = \sin^2 A$. Sehingga,

$\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A} = \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \left(\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)^2 = (\tan A)^2 = \tan^2 A$, terbukti.

b. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A = \ldots$

$(1-\sin^2 A) = \cos^2 A$, sehingga bentuk di atas menjadi,

$(1-\sin^2 A)\tan^2 A = \cos^2 A \tan^2 A = \cos^2 A\left(\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right) = \sin^2 A$, terbukti.

<u>Contoh 3</u>

Buktikan bahwa;

a. $(1-\cos^2 A)\cot^2 A = \cos^2 A$

b. $\sin^2 A(1+\cot^2 A) = 1$

Bukti:

a. $1-\cos^2 A = \sin^2 A$, dan $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$, sehingga

$(1-\cos^2 A)\cot^2 A = \sin^2 A\left(\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) = \cos^2 A$, terbukti.

b. $\sin^2 A(1+\cot^2 A) = \sin^2 A\left(1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$, terbukti.

B. Rumus-rumus yang Menghubungkan Tan A, Cot A, Sec A, Cosec A

Dari rumus $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, ruas kiri dan kanan dikuadratkan, sehingga menjadi $\tan^2 A = \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$. Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan 1, maka;

$$\tan^2 A + 1 = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + 1 = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$$

Jadi,

$$\boxed{\tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A}$$

Selanjutnya dari rumus $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$, setelah ruas kiri dan kanan dikuadratkan maka, $\cot^2 A = \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$. Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan 1, maka;

$$\cot^2 A + 1 = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} = \csc^2 A$$

Jadi,

$$\boxed{\cot^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A} = \csc^2 A}$$

Contoh 1

Buktikan bahwa;

a. $\sin^2 A\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\cos^2 A}\right)=\sec^2 A$

b. $\frac{\tan B}{\sec B-1}=\frac{\sec B+1}{\tan B}$

Bukti:

a. $\sin^2 A\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\cos^2 A}\right)=1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=1+\tan^2 A=\sec^2 A$, terbukti.

b. $\frac{\tan B}{\sec B-1}=\frac{\tan B}{(\sec B-1)}.\frac{\sec B+1}{\sec B+1}=\frac{\tan B(\sec B+1)}{\sec^2 B-1}$

$=\frac{\tan B(\sec B+1)}{\tan^2 B}=\frac{\sec B+1}{\tan B}$, terbukti.

Contoh 2

Buktikan bahwa;

a. $\frac{\csc B-1}{\cot B}=\frac{\cos B}{1+\sin B}$

b. $\cos B.\csc B.\tan B=1$

Bukti:

a. $\frac{\csc B-1}{\cot B}=\frac{\csc B-1}{\cot B}.\frac{\csc B+1}{\csc B+1}=\frac{\csc^2 B-1}{\cot B(\csc B+1)}$

$=\frac{\cot^2 B}{\cot B(\csc B+1)}=\frac{\cot B}{\csc B+1}$

$$= \frac{\frac{\cos B}{\sin B}}{\frac{1}{\sin B}+1} = \frac{\cos B}{1+\sin B}$$, terbukti.

b. $\cos B.\csc B.\tan B = \cos B.\frac{1}{\sin B}.\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos B}{\sin B}.\frac{\sin B}{\cos B} = 1$, terbukti.

Akibat dari rumus-rumus di atas:

$\tan A.\cot A = 1$

$\sin A.\csc A = 1$

$\cos A.\sec A = 1$

C. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

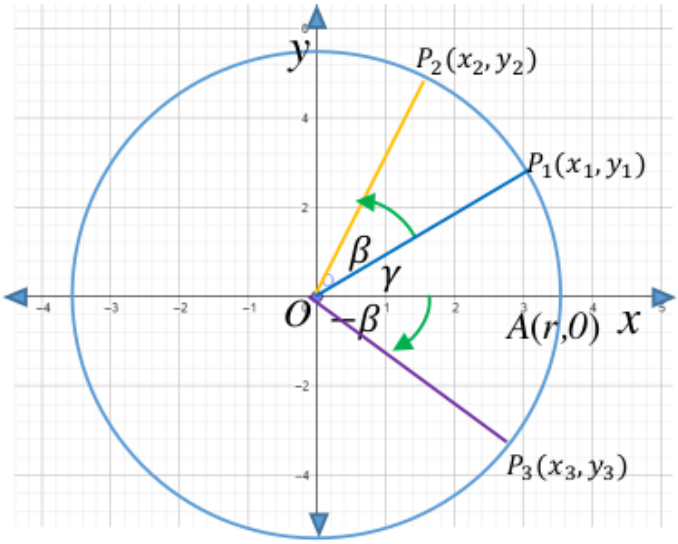
Pada lingkaran pusat *O*, jari-jari *r*, dibuat titik-titik $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, dan $A(r, o)$ sedemikian hingga:

$\angle XOP_1 = \alpha$ radian

$\angle XOP_2 = (\alpha + \beta)$ radian

$\angle XOP_3 = (-\beta)$ radian

Seperti tampak pada gambar 9 berikut:



Gambar 9

Dengan menggunakan definisi: $\cos\alpha^0 = \frac{x}{r}$, dan $\sin\alpha^0 = \frac{y}{r}$ atau $x = r\cos\alpha^0, y = r\sin\alpha^0$, dimana α^0 adalah besarnya $\angle XOP$, dan P adalah titik (x, y), maka untuk titik-titik P_1, P_2, dan P_3, didapat:

$$x_1 = r\cos\alpha, y_1 = r\sin\alpha$$

$$x_2 = r\cos(\alpha+\beta), y_2 = r\sin(\alpha+\beta)$$

$$x_3 = r\cos(-\beta), y_3 = r\sin(-\beta)$$

atau,

$$P_1(r\cos\alpha, r\sin\alpha), P_2(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta)), \text{dan}$$

$$P_3(r\cos(-\beta), r\sin(-\beta))$$

Karena: $\angle P_3OP_1 = \angle AOP_2$, maka $P_3P_1 = AP_2$.

Gunakan rumus jarak antara dua titik sehingga diperoleh:

$$\overline{P_3P_1}^2 = (r\cos\alpha - r\cos\beta)^2 + (r\sin\alpha - r\sin\beta)^2$$

$$\overline{AP_2}^2 = (r\cos(\alpha+\beta) - r)^2 + (r\sin(\alpha+\beta) - 0)^2$$. Sehingga,

- $(r\cos(\alpha+\beta) - r)^2 + (r\sin(\alpha+\beta) - 0)^2 =$

$(r\cos\alpha - r\cos\beta)^2 + (r\sin\alpha - r\sin\beta)^2$

- $r^2\cos^2(\alpha+\beta) - 2r^2\cos(\alpha+\beta) + r^2 + r^2\sin^2(\alpha+\beta) =$

$r^2\cos^2\alpha - 2r^2\cos\alpha\cos\beta + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\alpha +$

$2r^2\sin\alpha\sin\beta + r^2\sin^2\beta$

- $r^2(\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)) - 2r^2\cos(\alpha+\beta) + r^2 =$

$$r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+r^2\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)-2r^2\cos\alpha\cos\beta+$$

$$2r^2\sin\alpha\sin\beta$$

- $r^2-2r^2\cos(\alpha+\beta)+r^2=r^2-2r^2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$
- $-2r^2\cos(\alpha+\beta)=-2r^2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Jadi,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Selanjutnya rumus cosinus untuk selisih dua sudut diperoleh seperti berikut ini.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))$$

$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Jadi,

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Dengan menggunakan rumus $\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha$ atau $\sin\alpha=-\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)$, maka:

$$\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left(\frac{1}{2}\pi+(\alpha+\beta)\right)$$

$$= -\cos\left(\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) + \beta\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right)\sin\beta$$

$$= -(-\sin\alpha)\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Jadi,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Selanjutnya, $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$

$$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Jadi,

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Rumus tangen untuk jumlah dua sudut diperoleh dengan menggunakan rumus: $\tan\alpha^0 = \dfrac{\sin\alpha^0}{\cos\alpha^0}$, seperti berikut ini.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

(pembilang dan penyebut dibagi dengan $\cos\alpha\cos\beta$)

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi,

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$$

Selanjutnya, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

(pembilang dan penyebut dibagi dengan $\cos\alpha\cos\beta$)

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi,

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$$

Sebagai akibat dari rumus-rumus di atas, diperoleh rumus-rumus:

a. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, atau

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, atau

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

b. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

c. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Contoh 1

Hitunglah rumus-rumus berikut ini tanpa menggunakan daftar.

a. $\cos 15^0$ b. $\sin 15^0$ c. $\tan 15^0$

Jawab:

a. $\cos 15^0 = \cos(45-30)^0$

$= \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

b. $\sin 15^0 = \sin(45-30)^0$

$= \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

c. $\tan 15^0 = \tan(45-30)^0$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1+\tan 45^0 \tan 30^0}$

$= \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+1.\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Contoh 2

Sederhanakanlah:

a. $\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)$

b. $\cos 110^0 \cos 10^0 + \sin 110^0 \sin 10^0$

c. $\sin 80^0 \cos 10^0 + \cos 80^0 \sin 10^0$

d. $\sin 50^0 \cos 5^0 - \cos 50^0 \sin 5^0$

Jawab:

a. $\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) =$

$\cos\left(\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) + \left(\frac{1}{4}\pi + x\right)\right) = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$

b. $\cos 110^0 \cos 10^0 + \sin 110^0 \sin 10^0 = \cos\left(110^0 - 10^0\right) = \cos 100^0$

c. $\sin 80^0 \cos 10^0 + \cos 80^0 \sin 10^0 = \sin\left(80^0 + 10^0\right) = \sin 90^0 = 1$

d. $\sin 50^0 \cos 5^0 - \cos 50^0 \sin 5^0 = \sin\left(50^0 - 5^0\right) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Contoh 3

Jika $\sin A = \frac{7}{25}$, dan $\sin B = \frac{3}{5}$, A dan B sudut lancip, hitunglah:

a. $\sin(A - B)$ b. $\cos(A - B)$ c. $\tan(A + B)$

Jawab:

a. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

Untuk memeperoleh nilai dari $\cos A$ dan $\cos B$, digunakan rumus:

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$$\cos^2 A + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{526}{625}$$

$$\cos A = \frac{24}{25}$$

Selanjutnya,

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1$$

$$\cos^2 B + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \rightarrow \cos B = \frac{4}{5}$$

Maka, $\sin(A - B) = \frac{7}{25}.\frac{4}{5} - \frac{24}{25}.\frac{3}{5} = -\frac{44}{125}$

b. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$= \frac{24}{25}.\frac{4}{5} + \frac{3}{5}.\frac{7}{25} = -\frac{117}{125}$$

c. $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

Karena $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ maka $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{7}{24}$. Dan

$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3}{4}$.

Maka,

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{7}{24}+\frac{3}{24}}{1-\frac{7}{24}\frac{3}{24}}$$

$$= \frac{7+16}{24\left(1-\frac{7}{24}\frac{3}{24}\right)} = \frac{4}{3}$$

Contoh 3

Buktikanlah:

a. $\sin(270+a)^0 = -\cos a^0$

b. $\cos(a-b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0$, dimana $a = 90$ dan $b = 30$

Bukti:

16

a. $\sin(270+a)^0 = \sin 270^0 \cos a + \cos 270^0 \sin a$

$= -1.\cos a^0 + o.\sin a^0 = -\cos a^0$, terbukti.

b. $\cos(a-b)^0 = \cos(90-30)^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0 = \cos 90^0 \cos 30^0 + \sin 90^0 \sin 30^0$

$$= 0.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Jadi,

$\cos(a-b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0$, dimana $a = 90$ dan $b = 30$

D. Rumus Hasil kali, Jumlah dan Selisih Cosinus dan Sinus

1. Rumus Hasil Kali Cosinus dan Sinus

Rumus hasil kali cosinus dan sinus dapat diperoleh dengan menggunakan rumus-rumus jumlah dan selisih dua sudut, sebagai berikut:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad +$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B \text{, atau}$$

$$\boxed{2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

Rumus hasil kali sinus dengan sinus adalah:

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad -$$

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B \text{, atau}$$

$$\boxed{2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)}$$

Sedangkan rumus hasil kali cosinus dengan sinus adalah:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad -$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \text{, atau}$$

$$\boxed{2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)}$$

Dan rumus hasil kali sinus dengan cosinus adalah:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\text{———————————————} \quad +$$

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B \text{, atau}$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

Contoh 1

Nyatakan sebagai jumlah atau selisih dalam cosinus.

a. $2\cos(X+Y)\cos(X-Y)$ b. $2\sin 60^0 \sin 30^0$

Jawab:

a. $2\cos(X+Y)\cos(X-Y) = \ldots$

$= \cos((X+Y)+(X-Y)) + \cos((X+Y)-(X-Y))$

$= \cos 2X + \cos 2Y$

b. $2\sin 60^0 \sin 30^0 = \cos(60^0 - 30^0) - \cos(60^0 + 30^0)$

$= \cos 30^0 - \cos 90^0$

Contoh 2

Nyatakan sebagai jumlah atau selisih dalam sinus.

a. $2\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

b. $2\sin 35^0 \cos 15^0$

Jawab:

a. $2\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \ldots$

$= \sin\left(\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right) - \sin\left(\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) - \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right)$

$= \sin\pi - \sin 2x$

b. $2\sin 35^0 \cos 15^0 = \sin\left(35^0 + 15^0\right) + \cos\left(35^0 - 15^0\right)$

$= \sin 50^0 + \cos 20^0$

<u>Contoh 3</u>

Buktikan bahwa:

$2\cos 5A\cos 2A + 2\sin 3A\sin 4A - \cos 3A - \cos A = 0$

Bukti:

$2\cos 5A\cos 2A = \cos(5A + 2A) + \cos(5A - 2A)$

$= \cos 7A + \cos 3A$

$2\sin 3A\sin 4A = \cos(3A - 4A) - \cos(3A + 4A)$

$= \cos(-A) - \cos 7A = \cos A - \cos 7A$

Sehingga,

$2\cos 5A\cos 2A + 2\sin 3A\sin 4A - \cos 3A - \cos A$

$= \cos 7A + \cos 3A + \cos A - \cos 7A - \cos 3A - \cos A = 0$

2. Rumus Jumlah dan Selisih Cosinus dan Sinus

Rumus-rumus jumlah dan selisih cosinus dan sinus diperoleh dengan cara seperti berikut:

Misalkan:

$C = \alpha + \beta$

$B = \alpha - \beta$

Maka,

$C + D = 2\alpha$, atau $\alpha = \dfrac{C + D}{2}$

$C - D = 2\beta$, atau $\beta = \dfrac{C - D}{2}$

Sehingga:

$$\cos C + \cos D = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta$$

Masukkan harga-harga α dan β sehingga menjadi:

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{1}{2}(C + D) + \cos\frac{1}{2}(C - D)$$

Dengan menggunakan pemisalan di atas, maka:

$$\sin C + \sin D = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= 2\sin\alpha\cos\beta$$

Karena $\alpha = \frac{1}{2}(C + D)\ \beta = \frac{1}{2}(C - D)$, maka:

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{1}{2}(C + D)\cos\frac{1}{2}(C - D)$$

Selanjutnya,

$$\cos C - \cos D = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= -2\sin\alpha\cos\beta$$

Jadi, $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$

Demikian pula,

$$\sin C - \sin D = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= 2\cos\alpha\sin\beta$$

sehingga, $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$

Contoh 1

Sederhanakanlah!

a. $\cos(X+Y) + \cos(X-Y)$

b. $\cos 50^0 + \cos 30^0$

c. $\sin\left(\frac{1}{2}\pi+2x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi-2x\right)$

d. $\sin 32^0 - \sin 28^0$

e. $\sin(2x+y) + \sin(2x-y)$

f. $\sin 25^0 + \sin 15^0$

g. $\sin(2x+y) - \sin(2x-y)$

h. $\cos 200^0 - \cos 20^0$

Jawab:

a. $\cos(X+Y) + \cos(X-Y) = 2\cos\frac{1}{2}((X+Y)+(X-Y))\cos\frac{1}{2}((X+Y)-(X-Y))$

$$= 2\cos X\cos Y$$

b. $\cos 50^0 + \cos 30^0 = 2\cos\frac{1}{2}(50^0+30^0)\cos\frac{1}{2}(50^0-30^0)$

$$= 2\cos 40^0\cos 10^0$$

c. $\sin\left(\frac{1}{2}\pi+2x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi-2x\right)$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\pi+2x\right)+\left(\frac{1}{2}\pi-2x\right)\right)\sin\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\pi+2x\right)-\left(\frac{1}{2}\pi-2x\right)\right)$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\pi\sin 2x = 0$$

d. $\sin 32^0 - \sin 28^0 = 2\cos\frac{1}{2}\left(32^0 + 28^0\right)\sin\frac{1}{2}\left(32^0 - 28^0\right)$

$$= 2\cos 30^0 \sin 2^0$$

e. $\sin(2x+y) + \sin(2x-y)$

$$= 2\sin\frac{1}{2}\left((2x+y)+(2x-y)\right)\cos\frac{1}{2}\left((2x+y)-(2x-y)\right)$$

$$= 2\sin 2x\cos y$$

f. $\sin 25^0 + \sin 15^0 = 2\sin\frac{1}{2}\left(25^0 + 15^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(25^0 - 15^0\right)$

$$= 2\sin 20^0 \cos 5^0$$

g. $\sin(2x+y) - \sin(2x-y)$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left((2x+y)+(2x+y)\right)\sin\frac{1}{2}\left((2x+y)-(2x+y)\right)$$

$$= 2\cos 2x\sin y$$

h. $\cos 200^0 - \cos 20^0 = -2\sin\frac{1}{2}\left(200^0 + 20^0\right)\sin\frac{1}{2}\left(200^0 - 20^0\right)$

$$= -2\sin 110^0 \sin 90^0 = -2\sin 90^0$$

<u>Contoh 2</u>

Buktikan bahwa :

a. $\dfrac{\sin 40^0 + \sin 20^0}{\cos 40^0 + \cos 20^0} = \tan 30^0$

b. $\dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 3x - \sin 5x} = 2\sin 2x$

Bukti:

a. $$\frac{\sin 40^0 + \sin 20^0}{\cos 40^0 + \cos 20^0} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(40^0 + 20^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(40^0 - 20^0\right)}{2\cos\frac{1}{2}\left(40^0 + 20^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(40^0 - 20^0\right)}$$

$$= \frac{\sin 30^0 \cos 10^0}{\cos 30^0 \cos 10^0} = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \tan 30^0$$, terbukti.

b. $$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 3x - \sin 5x} = \frac{-2\sin\frac{1}{2}(3x + 5x)\sin\frac{1}{2}(3x - 5x)}{2\cos\frac{1}{2}(3x + 5x)\sin\frac{1}{2}(3x - 5x)}$$

$$= \frac{-2\sin 4x \sin(-x)}{2\cos 2x \sin x} = \frac{\sin 4x \sin x}{\cos 2x \sin x}$$

$$= \frac{\sin 4x}{\cos 2x} = \frac{2\sin 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 2\sin 2x$$, terbukti.

<u>Contoh 3</u>

Hitunglah nilai dari $\cos 75^0 + \cos 195^0$, tanpa menggunakan daftar.

Jawab:

$$\cos 75^0 + \cos 195^0 = 2\cos\frac{1}{2}\left(75^0 + 195^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(75^0 - 195^0\right)$$

$$= 2\cos 135^0 \cos(-60)^0$$

$$= 2\cos 135^0 \cos 60^0$$

$$= -2\cos 45^0 \cos 60^0$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

LATIHAN SOAL

1. Buktikanlah identitas-identitas di bawah ini.

   a. $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A = 2\sin^2 A - 1$

   b. $(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A) = 2\cos^2 A - 1$

   c. $\dfrac{\sin^3 A}{\cos A} + \sin A \cos A = \tan A$

   d. $\cos^2 A\left(1 + \tan^2 A\right) = 1$

   e. $\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

   f. $\cot^2 A - \cos^2 A = \cos^2 A \cot^2 A$

   g. $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A \cos A)$

   h. $\sin^4 A + \cos^4 A = 2\sin^4 A - 2\sin^2 A + 1$

   i. $\tan A\left(1 - \cot^2 A\right) + \cot A\left(1 - \tan^2 A\right) = 0$

   j. $\dfrac{1}{1 - \cos A} + \dfrac{1}{1 + \cos A} = 2\left(1 + \cot^2 A\right)$

2. Buktikan identitas-identitas berikut ini.

   a. $\sin A - \csc A = -\cot A \cos A$

   b. $\sin^2 A \cot^2 A + \cos^2 A \tan^2 A = 1$

   c. $\tan A + \cot A = \sec A \csc A$

   d. $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$

   e. $\sin A . \sec A . \cot A = 1$

f. $\tan^2 A + \cot^2 A = \sec^2 A.\csc^2 A - 2$

g. $\dfrac{\csc A - 1}{\cot A} = \dfrac{\cot A}{\csc A + 1}$

h. $\cot A.\csc A = \dfrac{1}{\sec A - \cos A}$

i. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A} = \dfrac{1 + \tan A}{\sec A}$

j. $\dfrac{(1 - \tan A)^2}{\sec^2 A} + 2\sin A\cos A = 1$

3. Sederhanakanlah.

a. $\cos X \cos Y + \sin X \sin Y$

b. $\cos 40^0 \cos 5^0 - \sin 40^0 \sin 5^0$

c. $\sin M \cos N + \cos M \sin N$

d. $\sin 2A\cos A - \cos 2A\sin A$

e. $\cos(A+B) + \cos(A-B)$

f. $\cos(A-B) - \cos(A+B)$

g. $\sin(A+B) + \sin(A-B)$

h. $\sin(A+B) - \sin(A-B)$

4. Hitunglah soal-soal berikut ini tanpa menggunakan daftar.

a. $\sin 75^0$

b. $\cos 75^0$

c. $\cos 22{,}5^0$

d. $\sin 105^0$

e. $\tan 285^0$

f. $\cos 165^0$

g. $\sin(-150)^0$

h. $\tan\left(\dfrac{-5}{4}\pi\right)$

5. Diketahui $\cos A = \dfrac{4}{5}$ dan $\sin B = \dfrac{7}{25}$, A dan B sudut lancip. Hitunglah nilai dari:

a. $\cos(A+B)$ b. $\sin(A+B)$ c. $\tan(A-B)$

6. Diketahui $\tan A = \frac{12}{5}$ dan $\tan B = \frac{4}{5}$, A dan B sudut lancip. Hitunglah nilai dari:

a. $\cos(A+B)$
b. $\sin(A+B)$
c. $\cos(A-B)$
d. $\sin(A-B)$
e. $\tan(A+B)$
f. $\tan(A-B)$

7. Buktikanlah.

a. $\cos(90+a) = -\sin a$

b. $\tan(270+a)^0 = -\cot a^0$

c. $\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

d. $\sin 2x - 2\sin^3 x\cos x - 2\sin x\cos^3 x = 0$

e. $\tan(X-Y) + \tan(Y-X) = 0$

f. $\cot X + \tan\frac{1}{2}X = \csc X$

g. $\sin(\theta-\phi) + \sin(\phi-\theta) = 0$

h. $\frac{1}{2}\sin\phi.\cot\frac{1}{2}\phi.\sec^2\frac{1}{2}\phi = 1$

i. $\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) = 0$

j. $\dfrac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)}{\sec x} = -\cos^2 x$

8. Sederhanakanlah.

a. $2\cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$

e. $2\cos 65^0 \cos 25^0$

b. $2\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\theta-\frac{1}{4}\pi\right)$

c. $2\sin\left(\theta+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(\theta-\frac{1}{2}\pi\right)$

d. $2\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$

f. $2\sin\frac{1}{3}\pi\sin\frac{1}{6}\pi$

g. $2\cos(\pi+y)\sin(\pi-y)$

h. $2\sin 75^0\cos 15^0$

9. Buktikanlah:

a. $2\sin 3A\sin 4A+2\cos 5A\cos 2A-\cos 3A=\cos A$

b. $\sin 52^0\sin 68^0-\sin 47^0\cos 77^0-cos65^0\cos 81^0=\frac{1}{2}$

c. $2\sin\frac{3}{2}A\cos\frac{1}{2}A+2\cos\frac{5}{2}A\sin\frac{3}{2}A+2\sin\frac{3}{2}A\cos\frac{7}{2}A=\sin 4A+\sin 5A$

d. $2\cos\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\theta-\frac{1}{4}\pi\right)=1-2\sin^2\theta$

e. $4\sin 3\theta\cos 3\theta\sin\theta=\cos 5\theta-\cos 7\theta$

f. $4\cos 6\theta\cos 4\theta\sin 2\theta=\sin 12\theta+(\sin 4\theta)(1-2\cos\theta)$

g. $4\cos 3\theta\sin 3\theta\cos\theta=\sin 7\theta+\sin 5\theta$

h. $2\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\theta-\frac{1}{4}\pi\right)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

i. $\sin\theta\sin\phi=\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)-\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\phi)$

j. $\sin^3\theta\cos^3\theta=\frac{3\sin 2\theta-\sin 6\theta}{32}$

10. Hitunglah soal-soal berikut tanpa menggunakan daftar.

a. $\sin 75^0 \cos 15^0$

b. $\sin 127{,}5^0 \sin 7{,}5^0$

c. $\sin 15^0 \cos 75^0$

d. $\cos 225^0 \cos 105^0$

e. $\cos 97{,}5^0 \cos 22{,}5^0$

f. $\cos 397{,}5^0 \sin(-82{,}5)^0$

g. $\sin 75^0 \sin 165^0$

h. $\cos 45^0 \sin 15^0$

11. Jika $\sin A + \sin B = k$ dan $\cos A + \cos B = m$, buktikan:

a. $k + m = 2\cos\frac{1}{2}(A-B)\left(\sin\frac{1}{2}(A+B) + \cos\frac{1}{2}(A+B)\right)$

b. $k = m\tan\frac{1}{2}(A+B)$

c. $k^2 + m^2 = 2(1+\cos(A-B)) = 4\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

12. Jika $x = \sin 3A + \sin A$ dan $y = \cos 3A + \cos A$, buktikan:

a. $x + y = 2\cos A(\sin 2A + \cos 2A)$

b. $x : y = \tan 2A$

c. $x^2 + y^2 = 2 + 2\cos 2A$

13. Sederhanakanlah.

a. $\cos 3x + \cos x$

b. $\cos(x+h) - \cos x$

c. $\cos(2x+y) + \cos(2x+y)$

d. $\dfrac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\sin(A+B) + \sin(A+B)}$

e. $\sin 5x + \sin x$

f. $\sin 3x - \sin x$

g. $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

h. $\dfrac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$

14. Buktikanlah.

a. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\cot\dfrac{1}{2}(A+B)$

b. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\tan\dfrac{1}{2}(A+B)\cot\dfrac{1}{2}(A-B)$

c. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\cos A-\cos B}=-\cot\dfrac{1}{2}(A+B)\cot\dfrac{1}{2}(A-B)$

d. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{1}{2}(A-B)$

e. $\dfrac{\sin 4A+\sin 2A}{\cos 4A+\cos 2A}=\tan 3A$

f. $\dfrac{4\sin A\cos B}{\cos 2A-\cos 2B}=-\left(\csc(A+B)+\csc(A-B)\right)$

g. $\dfrac{4\cos A\cos B}{\cos 2A+\cos 2B}=\sec(A+B)+\sec(A-B)$

15. Hitunglah soal-soal berikut tanpa menggunakan daftar.

a. $\cos 195^0+\cos 435^0$

b. $\cos 285^0-\cos 165^0$

c. $\cos\dfrac{1}{4}\pi+\cos\dfrac{5}{4}\pi$

d. $\sin 645^0+\sin(-15)^0$

e. $\sin 225^0-\sin 45^0$

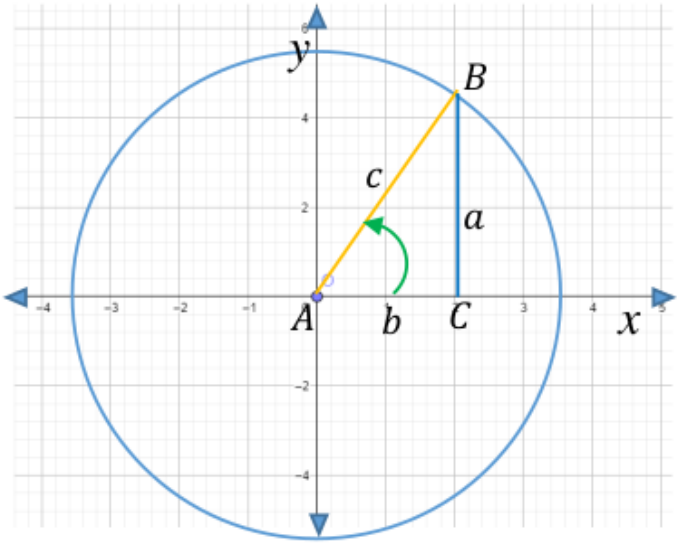
f. $\sin\dfrac{1}{3}\pi+\sin\dfrac{2}{3}\pi$

BAB III
PENERAPAN TRIGONOMETRI

A. Penerapan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku

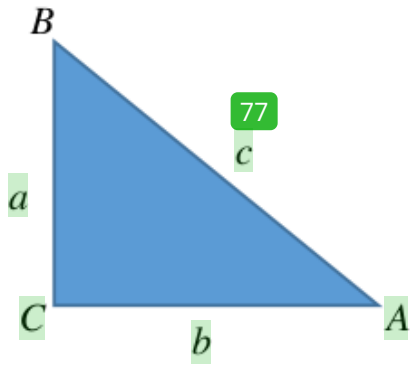
Pada gambar 10, segitiga *ABC* adalah segitiga siku-siku yang dilukis pada sumbu koordinat sedemikian hingga titik sudut *A* berimpit dengan titik pangkal *O* dan titik sudut *C* terletak pada sumbu *X*.

Maka titik sudut *B* adalah suatu titik dengan koordinat (b,a), dan titik sudut *C* adalah hypotenusa (sisi miring).



Gambar 10

Suatu segitiga siku-siku dapat ditempatkan pada sumbu koordinat sedemikian hingga salah satu titik sudutnya berimpit dengan titik pangkal *O*. Dengan demikian perbandingan-perbandingan trigonometri suatu sudut (misalnya sudut *B*) dari segitiga *ABC* yang tampak pada gambar 11 adalah:



Gambar 11

$$\cos B = \frac{a}{c}\left(\frac{\text{sisi siku-siku terdekat sudut B}}{\text{hypotenusa}}\right)$$

$$\sin B = \frac{b}{c}\left(\frac{\text{sisi siku-siku didepan sudut B}}{\text{hypotenusa}}\right)$$

$$\tan B = \frac{b}{a}\left(\frac{\text{sisi siku-siku di depan sudut B}}{\text{sisi siku-siku terdekat sudut B}}\right)$$

$$\cot B = \frac{a}{b}\left(\frac{\text{sisi siku-siku terdekat sudut B}}{\text{sisi siku-siku di depan sudut B}}\right)$$

$$\sec B = \frac{c}{a}\left(\frac{\text{hypotenusa}}{\text{sisi siku-siku terdekat sudut B}}\right)$$

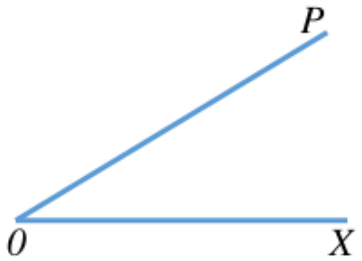
$$\sin B = \frac{c}{b}\left(\frac{\text{hypotenusa}}{\text{sisi siku-siku didepan sudut B}}\right)$$

Perbandingan-perbandingan trigonometri suatu sudut dari suatu segitiga sering digunakan untuk mencari tinggi dan jarak sesuatu.

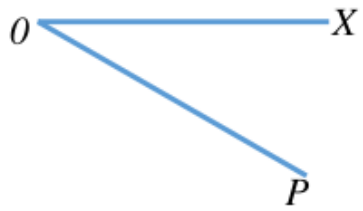
Salah satu pengertian dasar yang perlu diketahui di dalam perhitungan tinggi dan jarak adalah pengertian tentang *sudut elevasi dan sudut depresi*. Jika

suatu benda *P* diamati dari suatu tempat *O* terletak disebelah atas horisontal *OX*, maka sudut *XOP* yang terjadi antara horisontal *OX* dan garis penghubung *OP* disebut *sudut elevasi*. Jika benda P terletak disebelah bawah horisontal *OX*, maka sudut *XOP* disebut *sudut depresi*.

Untuk lebih jelasnya *sudut elevasi* dapat dilihat pada gambar 12, dan *sudut depresi* dapat dilihat pada gambar 13.



Gambar 12



Gambar 13

<u>Contoh 1</u>

Pada segitiga ABC diketahui sisi $a = 3cm$, sisi $c = 4cm$, dan $\angle B = 90^0$. Hitunglah:

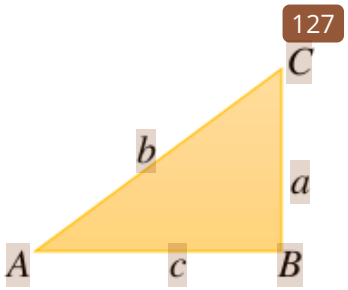
a. Besar sudut A

b. Besar sudut B

c. Panjang sisi B

Jawab:

a. Pada gambar 14 berikut sisi $a = 3cm$, sisi $c = 4cm$, dan $\angle B = 90^0$.



Gambar 14

$$\tan A = \frac{a}{c}$$
$$= \frac{3}{4}$$
$$= 0,750$$
$$\angle A \quad = 36,9^0$$

atau dapat pula dicari dengan menggunakan tabel fungsi logaritma tigonometri atau kalkulator sebagai berikut ini.

$$\tan A = \frac{3}{4}$$
$$\log \tan A = \log\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \log 3 - \log 4 = 0,477 - 0,602 = 0,875 - 1$$
$$\angle A = 36,9^0$$

b. Perhatikan gambar segitiga di atas.

$$\tan C = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} = 1,333$$
$$\angle C \quad = 53,1^0$$

Dapat pula diperoleh dengan cara berikut:

$$\angle C = 90^0 - \angle A = 90^0 - 36,9^0 = 53,1^0$$

c. $\sin A = \frac{a}{b}$

$$\sin 36,9^0 = \frac{3}{b} \rightarrow b = \frac{3}{\sin 36,9^0}$$

$$\log b = \log 3 - \log \sin 36,9^0$$
$$= 0,477 - (0,778 - 1) = 0,699$$

$$b = anti\log 0,699 = 5$$

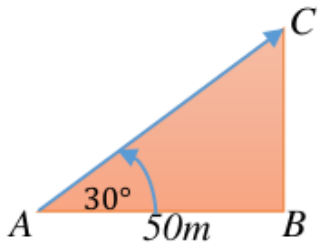
Jadi panjang sisi *b = 5cm*.

Contoh 2

Seorang yang tingginya 1,60 m berdiri pada suatu tempat di atas tanah yang horizontal pada jarak 50 m dari sebuah pohon. Orang itu melihat puncak pohon tersebut dengan sudut elevasi 30^0. Hitunglah tinggi pohon itu!

Jawab:

Pada segitiga ABC dalam gambar 16 di bawah ini, sudut $A = 30^0$ adalah sudut elevasi, dan BC adalah bagian tinggi pohon.



Gambar 15

$$\tan A = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{50}$$

$$\tan 30^0 = \frac{BC}{50}$$

$$BC = 50.\tan 30^0$$

$$= 50(0,577) = 28,85$$

Jadi tinggi pohon tesebut adalah $= 1,60 + 28,85 = 30,45m$.

Contoh 3

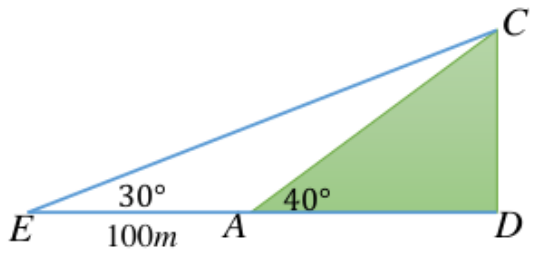
Dari suatu tempat dititik A pada tepi sungai yang lurus seorang melihat puncak menara di seberang sungai tepat di seberang titik A dengan sudut

elevasi 40^0 . Jika orang tadi berjalan mundur kebelakang sejauh 100 m dan melihat puncak menara dengan sudut elevasi 30^0 . Hitunglah:

a. Lebar sungai itu

b. Tinggi menara itu

Jawab:



Gambar 16

a. *CD* = tinggi menara

AD = lebar sungai

Perhatikan segitiga *ACD*,

$$\tan 40^0 = \frac{CD}{AD}$$

$$CD = AD.\tan 40^0 \text{ .....}(i)$$

Selanjutnya perhatikan segitiga BCD,

$$\tan 30^0 = \frac{CD}{BD}$$

$$CD = BD.\tan 30^0 \text{ .....}(ii)$$

Karena persamaan *(i)* sama dengan persamaan *(ii)*, maka

$$AD.\tan 40^0 = BD\tan 30^0 = (100 + AD)\tan 30^0$$

$$= 100\tan 30^0 + AD\tan 30^0$$

$$(\tan 40^0 - \tan 30^0) = 100\tan 30^0$$

$$AD = \frac{100\tan 30^0}{\tan 40^0 - \tan 30^0} = \frac{100(0{,}577)}{0{,}839 - 0{,}577}$$

$$= \frac{57{,}7}{0{,}262} = 220{,}2$$

Jadi lebar sungai tersebut adalah 220,2 meter.

b. Perhatikan segitiga ACD pada gambar di atas.

$$\tan 40^0 = \frac{CD}{AD}$$

$$CD = AD\tan 40^0 = 220{,}2\tan 40^0$$

$$= 220{,}2(0{,}839) = 184{,}75$$

Jadi tinggi menara tersebut adalah 184,75 meter.

<u>Contoh 4</u>

Seorang pengamat berada pada puncak menara yang tingginya 100 meter melihat sebuah kapal dipermukaan laut dengan sudut depressi 35^0. Hitunglah jarak kapal itu dari kaki menara.

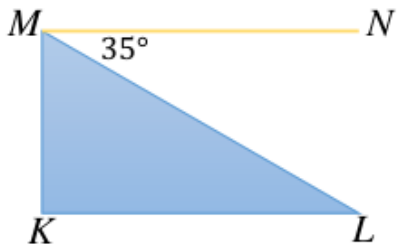
Jawab:

Perhatikan gambar di bawah ini.

$\angle KLM = 35^0$ (sudut berseberangan dalam dengan $\angle NML$)

KM = 100 m, yaitu tinggi menara.

Perhatikan segitiga KLM



Gambar 17

$$\tan 35^0 = \frac{KM}{KL}$$

$$KL = \frac{KM}{\tan 35^0} = \frac{100}{\tan 35^0}$$

$$\log KL = \log 100 - \log \tan 35^0$$
$$= 2 - (0{,}845 - 1) = 2{,}155$$
$$KL = anti \log 2{,}155 = 143$$

Jadi jarak antara kapal dan kaki menara adalah 143 meter.

Soal di atas dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

$$\angle KML = 90^0 - 35^0 = 55^0$$

$$\tan 55^0 = \frac{KL}{KM}$$

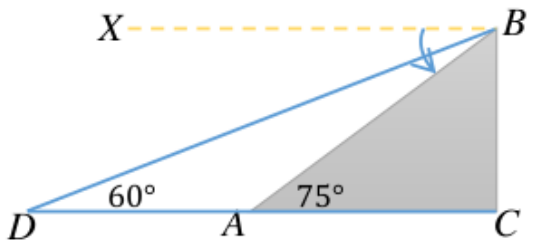
$$KL = KM \tan 55^0 = 100 \tan 55^0$$

$$\log KL = \log 100 + \log \tan 55^0$$
$$= 2 + 0{,}155 = 2{,}155$$
$$KL = anti \log 2{,}155 = 143$$

<u>Contoh 5</u>

Pada atap sebuah gedung yang tingginya 100 meter seorang melihat dua buah gardu dengan sudut depressi masing-masing 75^0 dan 60^0. Hitunglah jarak antar dua gardu itu.

Jawab:



Gambar 18

BC = 100m, yaitu tinggi gardu

$\angle BAC = 75^0$ (sudut berseberangan dalam sudut XBA)

$\angle BDC = 60^0$ (sudut berseberangan dalam sudut XBD)

Perhatikan segitiga BDC

$$\tan 60^0 = \frac{100}{DC}$$

$$DC = \frac{100}{\tan 60^0}$$

$$\log DC = \log 100 - \log \tan 60^0$$
$$= 2 - 0,239 = 1,761$$

$$DC = anti \log 1,761 = 57,7$$

Selanjutnya perhatikan segitiga BAC

$$\tan 75^0 = \frac{100}{AC}$$

$$AC = \frac{100}{\tan 75^0}$$

$$\log AC = \log 100 - \log \tan 75^0$$
$$= 2 - 0,572 = 1,428$$

$$DC = anti \log 1,428 = 26,8$$

Jadi jarak antara kedua gardu itu adalah *57,7 – 26,8 = 30,9* meter.

B. Penerapan Trigonometri Pada Segitiga Sembarang

Salah satu penerapan trigonometri yang sangat penting ialah penyelesaian pada segitiga, dan untuk penyelesaian segitiga ada empat aturan atau rumus yang penting, yaitu: *aturan cosinus, aturan sinus, aturan tangen, dan rumus luas segitiga*.

1. Aturan Cosinus

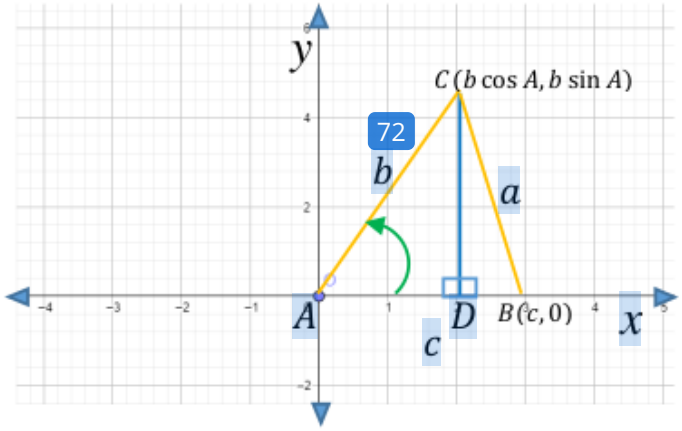
Pada setiap segitiga ABC berlaku:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Bukti:

Setiap segitiga *ABC* dapat digambar pada susunan sumbu koordinat sedemikian rupa sehingga salah satu titik sudut berimpit dengan titik pangkal *O*, dan salah satu sisinya berimpit dengan sumbu *OX*.

Pada gambar 19 segitiga *ABC* dengan sisi-sisi *a*, *b*, dan *c* dibuat sedemikian hingga titik sudut *A* berimpit dengan titik pangkal *O*, dan sisi *c* berimpit dengan *OX*. Sehingga *A* adalah titik $(0,0)$, *B* adalah titik $(c,0)$, dan *C* adalah titik $(b\cos A, b\sin A)$. Panjang sisi *A* adalah jarak antara titik *B* ketitik *C*.



Gambar 19

Maka,

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2 \\
&= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A \\
&= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$

Jadi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Dua rumus lainnya dapat dibuktikan dengan mengubah letak segitiga itu pada susunan sumbu koordinat. (buktikan sendiri).

Jika ketiga sisi dari segitiga itu diketahui, maka salah satu sudut dari segitiga itu dapat ditentukan dengan mengubah rumus-rumus di atas menjadi:

$$\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

Contoh 1

Pada segitiga ABC diketahui sisi $b = 12cm$, sisi $c = 9cm$, dan sudut $A = 65{,}5^0$. Hitunglah panjang sisi *a*.

Jawab:

Sesuai dengan unsur-unsur yang diketahui pada segitiga maka,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= (12)^2 + (9)^2 - 2(12)(9)\cos 65{,}5^0$$

$$= (12)^2 + (9)^2 - 2(12)(9)(0{,}415) = 135{,}36$$

$$a = 11{,}6$$

Jadi panjang sisi *a* = 11,6 cm.

Contoh 2

Pada segitiga ABC diketahui sisi $a = 4cm$, sisi $b = 5cm$, dan sisi $c = 7cm$. Hitunglah besar sudut *C*.

Jawab:

$$\cos C = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab} = \frac{\left(4^2 + 5^2 - 7^2\right)}{2.(4)(5)}$$

$$= \frac{(16 + 25 - 49)}{40} = -0{,}200$$

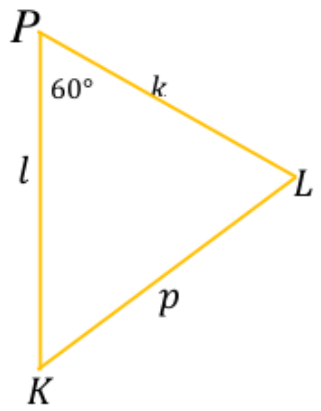
Karena $\cos C < 0$, maka C terletak dikuadran II.

Jadi, $C = 180^0 - 78{,}5^0 = 101{,}5^0$.

Contoh 3

Seorang penjaga pantai mengamati suatu kapal yang terletak 12 km ke arah selatan. Kemudian ia mengetahui pula bahwa pada jarak 10 km dengan sudut 60^0 arah ke timur dari arah selatan ada cahaya lampu. Hitunglah jarak kapal dari lampu.

Jawab:



Gambar 20

P = penjaga

K = kapal

L = lampu

l = 12km, yaitu jarak antara pengamat dan kapal

k = 10km, yaitu jarak antara penjaga dan lampu

p = jarak antara kapal dan lampu

$$p^2 = l^2 + k^2 - 2lk\cos P$$

$$= (12)^2 + (10)^2 - 2(12)(10)\cos 60^0$$

$$= 144 + 100 - 240(0{,}5) = 124$$

$$a = 11{,}14$$

Jadi jarak kapal dari lampu adalah 11,14 km.

Catatan:

Aturan cosinus berlaku pula pada segitiga tumpul. Buktikan sendiri.

2. Aturan Sinus

Pada tiap-tiap segitiga ABC berlaku:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bukti:

$$\cos A = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab}$$, diperoleh:

$$\cos^2 A = \frac{\left(b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2\right)}{4b^2c^2}$$

$$\cos^2 B = \frac{\left(a^4 + c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2\right)}{4a^2c^2}$$

$$\cos^2 C = \frac{\left(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right)}{4a^2b^2}$$

Dengan menggunakan rumus: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A, \sin^2 B = 1 - \cos^2 B$, dan $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$, maka:

$$\sin^2 A = \frac{\left(2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\right)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 B = \frac{\left(2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\right)}{4a^2c^2}$$

$$\sin^2 C = \frac{\left(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\right)}{4a^2b^2}$$

Persamaan-persamaan diatas setelah dibagi antara satu dengan yang lainnya menghasilkan:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{b^2}{c^2}$$

Karena a, b, dan c adalah sisi-sisi suatu segitiga, maka $a > 0, b > 0$, dan $c > 0$. Sedangkan $\sin A, \sin B$, dan $\sin C$ adalah positif, sebab A, B, dan C adalah sudut-sudut yang kurang dari 180^0. Maka,

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

Atau $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Dengan relasi transitif maka,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, terbukti.

<u>Contoh 1</u>

Pada segitiga ABC, diketahui $A = 44^0, B = 76^0$, dan sisi $a = 13{,}9cm$. Hitunglah panjang sisi B.

Jawab:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{13,9}{\sin 44^0} = \frac{b}{\sin 76^0}$$

$$b = \frac{(13,9)\sin 76^0}{\sin 44^0} = \frac{(13,9)(0,970)}{0,695} = 19,4$$

Jadi panjang sisi b adalah 19,4 cm.

Contoh 2

Pada segitiga ABC, diketahui sisi $a = 11,6cm$, sisi $c = 9cm$ dan $A = 65,5^0$.

Hitunglah besar sudut C.

Jawab:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{11,6}{\sin 65,5^0} = \frac{9}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{9\sin 65,5^0}{11,6} = \frac{9(0,910)}{11,6} = 0,706$$

$C = 44,9^0$ atau $135,1^0$

Karena jumlah $A + B + C = 180^0$, dan $A = 65,5^0$, maka $C = 44,9^0$.

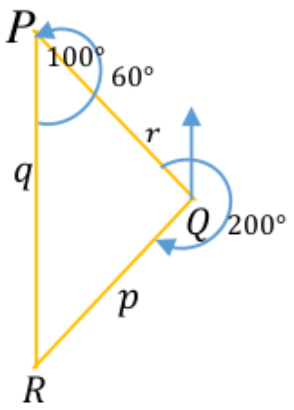
Contoh 3

Dua kapal P dan Q berjarak 8 km. Kapal Q letaknya pada arah 100^0 dari kapal P dan kapal R letaknya 160^0 dari kapal P. Dan kapal R letaknya pada 200^0 dari kapal Q. Hitunglah:

1. Jarak kapal R dari kapal P
2. Jarak kapal R dari kapal Q

Jawab:

Perhatikan segitiga PQR pada gambar 21 berikut ini.



Gambar 21

$P = 160^0 - 100^0 = 60^0$

$Q = 360^0 - \left(200^0 + 80^0\right) = 80^0$

$R = 8km$, yaitu jarak P dan Q

a. $\dfrac{q}{\sin Q} = \dfrac{r}{\sin R}$, $R = 180^0 - \left(60^0 + 80^0\right) = 40^0$

$$\frac{q}{\sin 80^0} = \frac{8}{\sin 40^0}$$

$$q = \frac{8\sin 80^0}{\sin 40^0} = \frac{0(0{,}985)}{0{,}643} = 12{,}3$$

Jadi jarak antara kapal *R* dan kapal *P* = 12,3 km.

b. Perhatikan segitiga *PQR* pada gambar di atas.

$$\frac{p}{\sin P} = \frac{r}{\sin R}$$

$$\frac{p}{\sin 60^0} = \frac{8}{\sin 40^0}$$

$$q = \frac{8\sin 60^0}{\sin 40^0} = \frac{0(0{,}866)}{0{,}643} = 10{,}77 = 10{,}8$$

Jadi jarak antara kapal R dan kapal Q = 10,8 km.

Contoh 4

Pada segitiga ABC diketahui $A = 110^0, C = 30^0$, dan sisi $c = 6\,cm$. Hitunglah:

a. Panjang sisi a

b. Panjang sisi b

Jawab:

a. $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 110^0} = \frac{6}{\sin 30^0}$$

$$a = \frac{6\sin 110^0}{\sin 30^0} = \frac{6\sin 70^0}{\sin 30^0} = \frac{6(0{,}940)}{0{,}500} = 11{,}28 = 11{,}3$$

Jadi panjang sisi a = 11,3 cm

b. $B = 180^0 - (110^0 + 30^0) = 40^0$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin 40^0} = \frac{6}{\sin 30^0}$$

$$a = \frac{6\sin 40^0}{\sin 30^0} = \frac{6(0{,}643)}{0{,}500} = 7{,}72$$

Jadi panjang sisi b = 7,72 cm.

3. Aturan Tangen

Pada setiap segitiga ABC berlaku:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+B)}{2}\right)}$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\left(\frac{(A-C)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+C)}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{(B-C)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(B+C)}{2}\right)}$$

Bukti:

Dari aturan sinus suatu sudut dari suatu segitiga, yaitu:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$$

Selanjutnya , ruas kiri dan ruas kanan ditambah dengan masing-masing penyebutnya sehingga menjadi:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin B}=\frac{a+b}{b}\text{.....}(i)$$

Dan ruas kiri dan kanan dikurangi dengan masing-masing penyebutnya, sehingga:

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin B}=\frac{a-b}{b}\text{.....}(ii)$$

Dengan pembagian antara persamaan (ii) dengan persamaan (i) didapat:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b}$$

Gunakan rumus jumlah dan selisih sinus hingga bentuk di atas menjadi:

$$\frac{2\cos\left(\frac{(A+B)}{2}\right)\sin\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{(A+B)}{2}\right)\cos\left(\frac{(A-B)}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{2\cos\left(\frac{(A+B)}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{(A+B)}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(A-B)}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+B)}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b}, \text{ atau } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+B)}{2}\right)}, \text{ terbukti.}$$

Dua rumus yang lain dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan bukti di atas.

<u>Contoh 1</u>

Pada segitiga ABC diketahui sisi $b = 12cm$, sisi $c = 9cm$, dan $A = 30^0$. Hitunglah:

a. Besar sudut B dan sudut C

b. Panjang sisi a

Jawab:

a. $\frac{(B+C)}{2} = \frac{(180^0 - A)}{2} = \frac{(180^0 - 30^0)}{2} = 75^0$. Maka:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{(B-C)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(B+C)}{2}\right)}$$

$$\frac{12-9}{12+9}=\frac{\tan\left(\frac{(B-C)}{2}\right)}{\tan 75^0}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{\tan\left(\frac{(B-C)}{2}\right)}{\tan 75^0}$$

$$\tan\left(\frac{(B-C)}{2}\right)=\frac{3\tan 75^0}{21}=\frac{3(3,732)}{21}=0,533$$

$$\left(\frac{(B-C)}{2}\right)=28,1^0$$

Dengan penjumlahan antara $\left(\frac{(B+C)}{2}\right)=75^0$ dan $\left(\frac{(B-C)}{2}\right)=28,1^0$

didapat $B=103,1^0$, dan dengan pengurangan didapat $C=46,9^0$.

b. $\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\left(\frac{(A-C)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+C)}{2}\right)}$, sehingga

$$\frac{a-9}{a+9}=\frac{\tan\left(\frac{(30^0-46,9^0)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{30^0+46,9^0}{2}\right)}=\frac{\tan(-8,45^0)}{\tan 38,45^0}=\frac{-\tan 8,5^0}{\tan 38,45^0}=-0,187$$

$$(a-9) = -0{,}187a - 1{,}683$$

$$1{,}187a = 7{,}317 \rightarrow a = \frac{7{,}317}{1{,}187} = 6{,}16 = 6{,}2$$

Jadi panjang sisi a = 6,2 cm.

<u>Contoh 2</u>

Pada segitiga ABC diketahui sisi $a = 16{,}2cm$, sisi $c = 25{,}7cm$, dan $B = 25{,}8^0$

. Hitunglah:

a. Besar sudut A dan sudut C

b. Panjang sisi b

Jawab:

a. $\frac{(C+A)}{2} = \frac{(180^0 - B)}{2} = \frac{(180^0 - 25{,}8^0)}{2} = 77{,}1^0$. Maka:

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\left(\frac{(C-A)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(C+A)}{2}\right)}$$

$$\frac{25{,}7 - 16{,}2}{25{,}7 + 16{,}2} = \frac{\tan\left(\frac{(C-A)}{2}\right)}{\tan 77{,}1^0}$$

$$\frac{9{,}5}{41{,}9} = \frac{\tan\left(\frac{(C-A)}{2}\right)}{\tan 77{,}1^0}$$

$$\tan\left(\frac{(C-A)}{2}\right) = \frac{(9{,}5)\tan 77{,}1^0}{41{,}9} = \frac{(9{,}5)(4{,}366)}{41{,}9} = 0{,}989$$

$$\left(\frac{(C-A)}{2}\right) = 44,7^0$$

Dengan penjumlahan antara $\left(\frac{(C-A)}{2}\right) = 44,7^0$ dan $\left(\frac{(C+A)}{2}\right) = 77,1^0$

didapat $A = 32,4^0$ dan $C = 121,8^0$.

b. $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{(A-B)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(A+B)}{2}\right)}$, sehingga

$$\frac{16,2-b}{16,2+b} = \frac{\tan\left(\frac{(32,4^0 - 25,8^0)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(32,4^0 + 25,8^0)}{2}\right)} = \frac{\tan 3,3^0}{\tan 29,1^0} = \frac{0,058}{0,557} = 0,104$$

$$16,2 - b = 1,685 + 0,104b$$

$$1,104b = 14,515 \rightarrow a = \frac{14,515}{1,104} = 13,1$$

Jadi panjang sisi b = 13,1 cm.

4. Luas Segitiga

Pada setiap segitiga *ABC* berlaku:

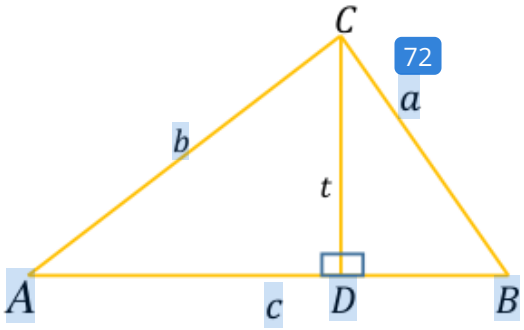
Luas segitiga ABC $= \frac{1}{2}bc\sin A$

Luas segitiga ABC $= \frac{1}{2}ac\sin B$

Luas segitiga ABC $= \frac{1}{2}ab\sin C$

Bukti:

Pada gambar 22, tampak segitiga *ABC* dengan sisi-sisi *a*, *b*, dan *c*. Sedangkan *t* adalah garis tinggi pada sisi *c*.



Gambar 22

Menurut geometri,

Luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2}at$ .....(i)

Dari segitiga *ACD*, didapat $\sin A = \frac{t}{b}$

Atau, $t = b\sin A$ .....(ii)

Masukkan nilai dari persamaan (ii) pada persamaan (i) sehingga:

Luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2}bc\sin A$, terbukti.

Selanjutnya dari segitiga *BCD* didapat:

$\sin B = \frac{t}{a}$ atau $t = a\sin B$ .....(iii)

Masukkan nilai *t* dari persamaan (iii) pada persamaan (i), didapat:

Luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2}ac\sin B$, terbukti.

Dengan cara yang sama, dapat pula dibuktikan bahwa:

Luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2} ab \sin C$, yaitu dengan mengubah letak segitiga tersebut.

Contoh 1

Pada segitiga *ABC*, diketahui sisi $a = 4cm$, sisi $b = 5cm$, dan $C = 30^0$. Hitunglah luas segitiga *ABC* itu.

Jawab:

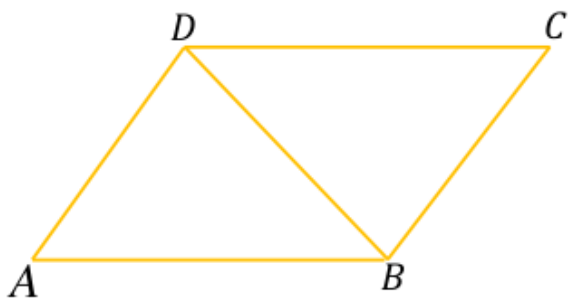
Luas segitiga ABC $= \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2}(4)(5)\sin 30^0 = \frac{1}{2}(4)(5)(0,5) = 5cm^2$$

Contoh 2

Dua sisi yang berdekatan pada suatu jajar genjang *ABCD* adalah 84 cm dan 68 *cm*. Sudur yang diapit oleh kedua sisi itu adalah 72^0. Hitunglah luas jajargenjang *ABCD* tersebut.

Jawab:



Gambar 23

Luas jajargenjang *ABCD* $= luas\ segitiga\ ABD + luas\ segitiga\ BCD$

Luas segitiga *BCD* = luas segitiga *ABD*

$$L_{BCD} = \frac{1}{2}(84)(68)\sin 72^0$$

$$= \frac{1}{2}(84)(68)(0{,}951)$$

$$= 2716{,}056 = 2716{,}1\,mm^2$$

Jadi, luas jajargenjang *ABCD* $= 2(2716{,}1) = 5432{,}2\,mm^2$

<u>Contoh 3</u>

Panjang kedua sisi yang sama dari suatu segitiga sama kaki adalah 4,2 cm. Luas segitiga itu adalah 6 cm^2. Hitunglah panjang sisi yang ketiga.

Jawab:

Luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2}ab\sin C$

$$6 = \frac{1}{2}(4{,}2)(4{,}2)\sin C$$

$$= 8{,}82\sin C$$

$$\sin C = \frac{6}{8{,}82} = 0{,}680$$

$$C = 42{,}8^0$$

Selanjutnya, $A - B = \frac{(180 - c)^0}{2} = \frac{(180^0 - 42{,}8^0)}{2} = 68{,}6^0$

Luas segitiga ABC $= \frac{1}{2}ac\sin B$

$$6 = \frac{1}{2}(4{,}2)c\sin 68{,}6^0 = (2{,}1)c\sin 68{,}6^0$$

$$c = \frac{6}{(2{,}1)(0{,}931)} = 3{,}1$$

Jadi panjang sisi c = 3,1 cm.

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui pada segitiga *ABC*, jika:
   a. $A = 90^0, a = 17\,cm$, dan $c = 8\,cm$
   b. $A = 50,6^0, B = 90^0$, dan $a = 15\,cm$
   c. $C = 90^0, a = 10\,cm$, dan $b = 5\,cm$
   d. $A = 90^0, a = 18\,cm$, dan $b = 12\,cm$
   e. $A = 25,3^0, B = 90^0$, dan $c = 8\,cm$
2. Seorang anak yang tingginya 1,25 meter berdiri pada jarak 75 meter dari kaki suatu menara, melihat puncak menara itu dengan sudut elevasi 65^0. Hitunglah tinggi menara itu.
3. Mata seorang pengamat terletak pada ketinggian 2,5 meter diatas tanah. Sudut depressi kaki sebuah gedung dari mata pengamat adalah 5^0. Sudut elevasi atap gedung dari pengamat adalah 20^0. Hitunglah:
   a. Jarak horisontal pengamat dari gedung
   b. Tinggi gedung
4. Tinggi puncak sebuah gedung dari tempat peluncuran roket 1200 meter. Sudut depressi tempat peluncuran roket dari gunung adalah 35^0. Hitunglah jarak puncak gunung dari tempat peluncuran roket.
5. Dari suatu titik diatas tanah mendatar disebelah barat suatu menara terlihat menara itu dengan sudut elevasi 43^0. Dari titik lain disebelah timur menara terlihat puncak menara itu dengan sudut elevasi 58^0. Jarak antara kedua titik itu adalah 75 meter. Hitunglah tinggi menara itu.
6. Hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui pada segitiga *ABC*, jika:

a. $a = 6\,cm, b = 8\,cm$, dan $c = 7\,cm$

b. $a = 12\,cm, b = 10\,cm$, dan $c = 15\,cm$

c. $A = 32,4^0, b = 10\,cm$, dan $c = 8\,cm$

d. $C = 45,3^0, a = 14\,cm$, dan $c = 12\,cm$

e. $B = 29,6^0, a = 10\,cm$, dan $c = 6\,cm$

7. Hitunglah besar sudut-sudut jajargenjang bila dua sisi yang berdekatan dan diagonal dari titik sudut berpotongan kedua sisi tadi berturut-turut panjangnya 4 cm, 9 cm, dan 10 cm.
8. Dua kapal meninggalkan suatu pelabuhan bersama-sama. Kapal pertama berlayar dengan arah 045^0 dengan kecepatan 9 km/jam sedangkan kapal yang lain berlayar dengan arah 090^0 dengan kecepatan 12 km/jam. Berapakah jarak antara kedua kapal itu setelah berlayar 2 jam.
9. Kota *B* terletak 20 km arah utara dari kota *A*, dan kota *C* terletak 15 km arah timur laut dari kota *A*. Hitunglah jarak antara kota *B* dan kota *C*.
10. Jarak kota *C* dari kota *A* dan kota *B* adalah 10 km dan 20 km. Jika besar sudut C =120^0, hitunglah jarak kota dan kota *B*.
11. Hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui pada segitiga *ABC*, jika:
    a. $A = 64,2^0$, sisi $a = 20$ cm, dan $c = 14$ cm.
    b. $B = 32^0$, $C = 68^0$, dan sisi $b = 23,6$ cm.
    c. $B = 29,3^0$, sisi $a = 25$ cm, dan sisi $b = 30$ cm.
    d. $A = 100^0$, $C = 28^0$, sisi $a = 25$ cm.
    e. $C = 162^0$, sisi $a = 25$ cm, dan sisi $c = 44,5$ cm.

12. Dari titik *B* terlihat sebuah puncak gunung dengan sudut elevasi 35^0. Dari titik *B*, puncak gunung itu terlihat dalam sudut elevasi 15^0. Jarak antara titik *A* dan titik *B* adalah 1200 m.

Hitunglah tinggi gunung itu!

13. Dua kapal *P* dan *Q* berjarak 80 km. Kapal *Q* letaknya pada arah 100^0 dari kapal *P*, kapal *R* 160^0 dari kapal P. Kapal *R* letaknya pada arah 200^0 dari kapal *Q*.

Hitunglah:

    a. Jarak kapal R dari kapal P
    b. Jarak kapal R dari kapal Q

14. Jarak antara kota A dan kota B adalah 120 km. Jarak kota A dan kota C 100 km. Jika kota A terlihata dari kota C dengan sudut elevasi $35{,}2^0$, hitunglah jarak antara kota B dan kota C!

15. Seorang tukang ukur mengukur sebidang tanah. Batas tanah AB diukur panjangnya 440 m. Tonggak batas C diukur arah letak dari A dan B. Terdapat sudut BAC = 48^0 dan sudut ABC = 75^0. Hitunglah:

    a. Jarak tonggak C dari A
    b. Jarak tonggak C dari B

16. Pada segiempat PQRS diketahui P = 90^0, sudut QSR = 54^0, QP = 24 cm, PS = 18 cm, dan SR = 16 cm. Hitunglah:

    a. Panjang QS
    b. Luas segiempat PQRS

17. Hitunglah luas segibanyak beraturan yang dilukiskan

    a. Segilima dalam lingkaran yang berjari-jari 10 cm
    b. Segidelapan dalam lingkaran yang berjari-jari 1 m

c. Segidelapan puluh dalam lingkaran yang berjari-jari 1 cm

18. PQRS adalah jajargenjang. Panjang PQ = 7,5 cm, QR = 9,25 cm, besar sudut PQR = $42,6^0$. Hitunglah:
    a. Panjang diagonal PR
    b. Panjang diagonal QS
    c. Luas jajargenjang PQRS
19. PR dan QS saling membagi di M. Panjang PR = 30 cm dan QS = 16 cm. Besar sudut PMS = 120^0. Hitunglah:
    a. Luas segiempat itu
    b. Keliling segiempat itu
20. Suatu jendela kaca terdiri dari 150 kaca yang berbentuk segienam beraturan. Bila sisi masing-masing segienam itu panjangnya 8 cm, hitunglah luas seluruh jendela itu!

BAB IV
PERSAMAAN TRIGONOMETRI

A. Penyelesaian Umum

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang mengandung satu atau dua fungsi trigonometri untuk satu atau beberapa sudut yang tidak diketahui. Bentuk-bentuk seperti:

$\cos x^0 = p$

$\sin x^0 = p$

$\tan x^0 = 0,5$

dan seterusnya, adalah bentuk-bentuk persamaan trigonometri dengan satu sudut tak diketahui. Sudut tak diketahui dinyatakan oleh x^0, sedangkan *p* mewakili suatu bilangan. Persamaan-persamaan seperti tersebut di atas dapat diselesaikan apabila daerah asalanya ditentukan. Dalam menyelesaikan persamaan trigonometri lebih banyak digunakan rumus-rumus dasar trigonometri.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $\cos x^0 = 0,5$ dengan $x \in R$.

Jawab:

$\cos x^0 = 0,5 \Rightarrow x = 60 \; atau \; x = 300$. Fungsi cosinus mempunyai periode 2π atau 360^0, artinya $\cos a^0 = \cos(a + 360)^0$.

Untuk interval $0 \le x < 360^0$, terdapat dua sudut yang mempunyai nilai cosinus yang sama, yaitu $x = 60$ atau $x = 300$.

Untuk interval 360 berikutnya yaitu $360 \le x < 720$ juga terdapat dua sudut yang memberikan nilai cosinus yang sama, yaitu $x = 60 + 360 = 420$ atau $x = 300 + 360 = 660$.

Demikian seterusnya untuk tiap 360 berikutnya terdapat dua sudut yang memberikan nilai cosinus yang sama. Secara umum didapat:

$$\cos x^0 = 0{,}5 \Rightarrow x = 60 + n.360 \quad \text{atau}$$
$$x = 300 + n.360,\ n \in B$$

jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$\{60 + n.360\} \cup \{300 + n.360\}, n \in B$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $\sin x^0 = 0{,}5$ dengan $x \in R$.

Jawab:

$\sin x^0 = 0{,}5 \Rightarrow x = 30\, atau\, x = 150$. Fungsi sinus mempunyai periode 2π atau 360^0, artinya $\sin a^0 = \sin(a + 360)^0$.

Dalam $0 \le x < 360^0$, terdapat dua sudut yang mempunyai nilai sinus yang sama, yaitu $x = 30$ atau $x = 150$.

Untuk interval $360 \le x < 720$ juga terdapat dua sudut yang memberikan nilai sinus yang sama, yaitu $x = 30 + 360 = 390$ atau $x = 150 + 360 = 510$.

Demikian seterusnya untuk tiap 360 berikutnya terdapat dua sudut yang memberikan nilai sinus yang sama. Secara umum didapat:

$\sin x^0 = 0{,}5$ dimana $x \in R$, maka

$x = 30 + n.360$ atau

$x = 150 + n.360,\ n \in B$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$\{30 + n.360\} \cup \{150 + n.360\}, n \in B$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $\tan x^0 = 0{,}577$ dengan $x \in R$.

Jawab:

$\tan x^0 = 0{,}577 \Rightarrow x = 30\, atau\, x = 210$. Fungsi tangen mempunyai periode π atau 180^0, artinya $\tan a^0 = \tan(a + 180)^0$.

Dalam $0 \le x < 180^0$, terdapat dua sudut yang mempunyai nilai tangen yang sama dengan 0,577.

Demikian seterusnya untuk tiap 180. Jadi untuk $x \in R$:

$$\tan x^0 = 0{,}577 \Rightarrow x = 30 + n.180,\ n \in B$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$\{30 + n.180\}, n \in B$

B. Persamaan Yang Mengandung Jumlah Cosinus Atau Sinus

Untuk menyelesaikan persamaan ini pada dasarnya seperti penyelesaian pada aljabar, yaitu dengan langkah-langkah:

a) Ruas kanan dijadikan nol

b) Ruas kiri difaktorkan

c) Setiap faktor disamakan dengan nol, yang berprinsip pada:

$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ atau $b = 0$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $\sin 4x^0 + \sin 2x^0 = 0$ untuk $0 \le x < 360^0$.

Jawab:

$\sin 4x^0 + \sin 2x^0 = 0$ dan $0 \le x < 360^0$

$$2\sin\frac{1}{2}(4x+2x)^0 \cos\frac{1}{2}(4x-2x)^0 = 0$$

$$2\sin 3x^0 \cos x^0 = 0$$

$$\sin 3x^0 \cos x^0 = 0$$

$\sin 3x^0 = 0$ atau $\cos x^0 = 0$

Dari $\sin 3x^0 = 0, \Rightarrow 3x = 0 + n.360$ atau $180 + n.360$

$x = n.120$ atau $x = 60 + n.120,\ n = 0,1,2,3$

Atau $x = 0,60,120,240,180,300$

Dari $\cos x^0 = 0, \Rightarrow x = 90,270$

Himpunan penyelesaian ialah $\{x = 0,60,120,180,240,270,300\}$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\cos 3x^0 + \cos 2x^0 + \cos x^0 = 0$, untuk $0 \le x < 360^0$.

Jawab:

$\cos 3x^0 + \cos 2x^0 + \cos x^0 = 0$, $0 \le x < 360^0$

$$\left(\cos 3x^0 + \cos x^0\right) + \cos 2x^0 = 0$$

$$2\cos\frac{1}{2}(3x+x)^0 \cos\frac{1}{2}(3x-x)^0 + \cos 2x^0 = 0$$

$$2\cos 2x \cos x + \cos 2x^0 = 0$$

$\cos 2x(2\cos x+1)=0$

$\cos 2x=0$ atau $2\cos x=-1$

$\cos 2x=0$ atau $\cos x=\frac{-1}{2}$

Dari $\cos 2x=0, \Rightarrow\ 2x=90+n.360$ atau $2x=270+n.360$

$$x=45+n.360 \text{ atau } x=135+n.360, \quad n=0,1$$

Atau $x=45,135,225,315$

Dari $\cos x=-\frac{1}{2}, \Rightarrow\ x=120,240$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\{x=45,120,135,225,240,315\}$

<u>Contoh 3</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\sin 3x+\sin x=0$, untuk $0\le x<2\pi$.

Jawab:

$\sin 3x+\sin x=0$, $0\le x<2\pi$

$2\sin\frac{1}{2}(3x+x)\cos\frac{1}{2}(3x-x)=0$

$2\sin 2x\cos x=0$ atau $\sin 2x\cos x=0$

$\sin 2x=0$ atau $\cos x=0$

Dari $\sin 2x=0, \Rightarrow\ 2x=0+n.2\pi$ atau $2x=\pi+n.2\pi$

$$x=n\pi \text{ atau } x=\frac{1}{2}\pi+n\pi, \quad n=0,1$$

atau $x=0,\frac{1}{2}\pi,\pi,\frac{3}{2}\pi$

Dari $\cos x = 0, \Rightarrow \; x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\left\{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$

<u>Contoh 4</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\frac{\sin x^0}{\cos 2x^0} - \sin x^0 = \cos x^0 - \frac{\cos x^0}{\cos 2x^0}$, untuk $0 \le x < 360^0$

Jawab:

$$\frac{\sin x^0}{\cos 2x^0} - \sin x^0 = \cos x^0 - \frac{\cos x^0}{\cos 2x^0}, \quad 0 \le x < 360^0$$

$$\frac{\sin x^0 - \sin x^0 \cos 2x^0}{\cos 2x^0} = \frac{\cos x^0 \cos 2x^0 - \cos x^0}{\cos 2x^0}$$

Dari $\cos 2x \ne 0, \Rightarrow \; 2x \ne 90 + n.360$ atau $2x \ne 270 + n.360$

$$x \ne 45 + n.180 \text{ atau } x \ne 135 + n.180, \quad n = 0,1$$

atau $x \ne 45,135,225,315$

$$\sin x^0 - \sin x^0 \cos 2x^0 = \cos x^0 \cos 2x^0 - \cos x^0$$

$$\sin x^0 + \cos x^0 - \cos 2x^0 \left(\sin x^0 + \cos x^0\right) = 0$$

$$\left(\sin x^0 + \cos x^0\right)\left(1 - \cos 2x^0\right) = 0$$

$\sin x^0 + \cos x^0 = 0$ atau $1 - \cos 2x^0 = 0$

$\tan x^0 = -1$ atau $\cos 2x^0 = -1$

Dari $\tan x^0 = -1 \Rightarrow x = 135,315$ (tidak memenuhi)

Dari $\cos 2x^0 = -1 \;\Rightarrow\; 2x = 0 + n.360$

$$x = n.180 \;,\; n = 0,1,2$$

Atau $x = 0,180,360$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\{0,180,360\}$

Contoh 5

Untuk harga-harga p berapakah $\sin^4 x^0 + \cos^4 x^0 = p$, dapat diselesaikan?

Tentukan himpunan penyelesaiannya jika $p = \frac{1}{2}$, dan $0 \le x < 360^0$.

Jawab:

$$\sin^4 x^0 + \cos^4 x^0 = p$$

$$\left(\sin^2 x^0 + \cos^2 x^0\right)^2 - 2\sin^2 x^0 \cos^2 x^0 = p$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 x^0 = p$$

$$2 - \frac{1}{2}\sin^2 x^0 = 2p$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 x^0 = 2 - 2p \Rightarrow 0 \le 2 - 2p \le 1$$

$$\begin{array}{ll} 2 - 2p \ge 0 & 2 - 2p \le 0 \\ 2p \le 2 & 2p \ge 1 \\ p \le 1 & p \ge \frac{1}{2} \end{array}$$

Agar ada penyelesaian : $\frac{1}{2} \le p \le 1$

$$p = \frac{1}{2}, \Rightarrow \sin^2 2x^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\sin^2 2x^0 = 1, \Rightarrow 2x = 90 + n.360$$

$$x = 45 + n.180, \; n = 0,1$$

$$\sin^2 2x^0 = -1, \Rightarrow 2x = 270 + n.360$$

$$x = 135 + n.180,\ n = 0,1$$

Atau $x = 45,135,225,315$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\{45,135,225,315\}$

C. Persamaan Kuadrat Dalam Cosinus, Sinus Dan Tangen

Persamaan kuadrat dalam cosinus atau sinus atau tangen berbentuk: $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$, $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, dan

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0,\ a \neq 0$

Cara penyelesaian sama dengan penyelesaian pada persamaan kuadrat dalam aljabar, yaitu dengan memfaktorkan atau dengan rumus penyelesaian, dengan memperhatikan bahwa $-1 \leq \sin x \leq 1$ dan $-1 \leq \cos x \leq 1$, untuk sebarang nilai x.

Rumus-rumus trigonometri untuk mendukung penyelesaian persamaan kuadrat ini terutama rumus-rumus untuk jumlah dua sudut dalam cosinus, sinus, dan tangen, seperti:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$, atau

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

<u>Contoh 1</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\cos 2x^0 + \cos x^0 = 0$, untuk $0 \leq x < 360^0$

jawab:

$\cos 2x^0 + \cos x^0 = 0$, $0 \le x < 360^0$

$2\cos^2 x^0 - 1 + \cos x^0 = 0$

$2\cos^2 x^0 + \cos x^0 - 1 = 0$

$(2\cos x^0 - 1)(\cos x^0 + 1) = 0$

$2\cos x^0 - 1 = 0$ atau $\cos x^0 + 1 = 0$

$\cos x^0 = \frac{1}{2}$ atau $\cos x^0 = -1$

Dari $\cos x^0 = \frac{1}{2}, \Rightarrow x = 60,300$

Dari $\cos x^0 = -1, \Rightarrow x = 180$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{60,180,300\}$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\cos 2x^0 + \sin x^0 = 0$, untuk $0 \le x < 360^0$

Jawab:

$\cos 2x^0 + \sin x^0 = 0$, $0 \le x < 360^0$

$1 - 2\sin x^0 + \sin x^0 = 0$

$2\sin x^0 + \sin x^0 - 1 = 0$

$(2\sin x^0 + 1) + (\sin x^0 - 1) = 0$

$2\sin x^0 + 1 = 0$ atau $\sin x^0 - 1 = 0$

$\sin x^0 = -\frac{1}{2}$ atau $\sin x^0 = 1$

Dari $\sin x^0 = -\frac{1}{2}, \Rightarrow x = 210,330$

Dari $\sin x^0 = 1, \Rightarrow x = 90$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{90, 210, 330\}$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$3\cos 2x - \cos x + 2 = 0$, untuk $0 \le x < 2\pi$.

Jawab:

$3\cos 2x - \cos x + 2 = 0$, $0 \le x < 2\pi$

$3\left(2\cos^2 x - 1\right) - \cos x + 2 = 0$

$6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\left(3\cos x + 1\right)\left(2\cos x - 1\right) = 0$

$3\cos x + 1 = 0$ atau $2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{3}$ atau $\cos x = \frac{1}{2}$

Dari $\cos x = -\frac{1}{3} = -0{,}333, \Rightarrow x = \frac{6}{10}\pi, \frac{14}{10}\pi$

Dari $\cos x = \frac{1}{2}, \Rightarrow x = \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{6}{10}\pi, \frac{14}{10}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$.

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$3\tan^2 x + 4\sin^2 x = 2$, untuk $0 \le x < 2\pi$.

Jawab:

$3\tan^2 x + 4\sin^2 x = 2$, $0 \le x < 2\pi$

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}+4\sin^2 x=2$$

$$3\sin^2 x+4\sin^2 x\cos^2 x=2\cos^2 x$$

$$3\sin^2 x+4\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)=2\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x+4\sin^2 x-4\sin^4 x=2-2\sin^2 x$$

$$4\sin^4 x-9\sin^2 x+2=0$$

$$\left(4\sin^2 x-1\right)\left(\sin^2 x-2\right)=0$$

$4\sin^2 x-1=0$ atau $\sin^2 x-2=0$

$\sin^2 x=\frac{1}{4}$ atau $\sin^2 x=2$

$$\sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi$$

$\sin^2 x=2\Rightarrow x=\varnothing$, sebab $\sin^2 x>2$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{1}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi\right\}$.

<u>Contoh 5</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$\sin x\sin 3x+1=0$, untuk $0\le x<2\pi$.

Jawab:

$\sin x\sin 3x+1=0$, $0\le x<2\pi$

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + 1 = 0$$

$$\cos 2x - \cos 4x + 2 = 0$$

$$\cos 4x - \cos 2x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0$$

$$(2\cos 2x - 3)(\cos 2x + 1) = 0$$

$2\cos 2x - 3 = 0$ atau $\cos 2x + 1 = 0$

$\cos 2x = \frac{3}{2}$ atau $\cos 2x = -1$

Dari $\cos 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \varnothing$, sebab $\cos 2x > 1$

$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = \pi + n.2\pi$

$$x = \frac{1}{2}\pi + n.\pi, n = 0,1$$

Atau $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

Himpunan penyelesaian adalah $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

D. Persamaan Berbentuk $a\cos x^0 + b\sin x^0 = c$

Untuk penyelesaian persamaan $a\cos x^0 + b\sin x^0 = c$, ruas kiri diubah menjadi bentuk $k\cos(x-\alpha)^0$, dengan cara sebagai berikut:

$$a\cos x^0 + b\sin x^0 = k\cos(x-\alpha)^0, k > 0, 0 < \alpha < 360$$

$$= k\left(\cos x^0 \cos \alpha^0 + \sin x^0 \sin \alpha^0\right)$$

$$= k\cos x^0 \cos\alpha^0 + k\sin x^0 \sin\alpha^0$$

$$= k\cos\alpha^0 \cos x^0 + k\sin\alpha^0 \sin x^0$$

Maka,

$\begin{cases} k\cos\alpha^0 = a \\ k\sin\alpha^0 = b \end{cases}$ $\tan\alpha^0 = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \text{tertentu}$, dan ditentukan oleh tanda $\cos\alpha^0$ dan $\sin\alpha^0$.

dan,

$$k^2\cos^2\alpha^0 = a^2$$

$$k^2\sin^2\alpha^0 = b^2$$

$$\text{———————} +$$

$$k^2\left(\cos^2\alpha^0 + \sin^2\alpha^0\right) = a^2 + b^2$$

$$k^2 = a^2 + b^2$$

$$k = \sqrt{a+b},\ \text{k tertentu}$$

Karena k > 0 maka letak α ditentukan oleh $\cos\alpha^0$ dan $\sin\alpha^0$, yaitu tanda a dan b.

Setelah $a\cos x^0 + b\sin x^0 = c$ diubah menjadi $k\cos\left(x-\alpha\right)^0$, maka berarti $k\cos\left(x-\alpha\right)^0 = c$, dan selanjutnya x dapat dicari.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$7\cos x^0 + 4\sin x^0 = 5$, untuk $0 \le x < 360^0$

Jawab:

Misalkan $7\cos x^0 + 4\sin x^0 = k\cos\left(x-\alpha\right)^0$, $k > 0$

$$= k\left(\cos x^0 \cos\alpha^0 + \sin x^0 \sin\alpha^0\right)$$
$$= k\cos x^0 \cos\alpha^0 + k\sin x^0 \sin\alpha^0$$
$$= k\cos\alpha^0 \cos x^0 + k\sin\alpha^0 \sin x^0$$

Maka $\begin{cases} k\cos\alpha^0 = 7 \\ k\sin\alpha^0 = 4 \end{cases}$ $\quad k = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$

$\tan\alpha^0 = \frac{4}{7} = 0{,}571 \Rightarrow \alpha = 29{,}7$, sebab terletak dikuadran I

Dengan demikian $7\cos x^0 + 4\sin x^0 = \sqrt{65}\cos\left(x - 29{,}7\right)^0$

Sehingga $\sqrt{65}\cos\left(x - 29{,}7\right)^0 = 5$

$$\cos\left(x - 29{,}7\right)^0 = \frac{5}{\sqrt{65}}$$

$$\log\cos\left(x - 29{,}7\right)^0 = log5 - \frac{1}{2}\log 65$$
$$= 0{,}669 - \frac{1}{2}\left(1{,}813\right)$$
$$= 0{,}669 - 0{,}907 = 0{,}792 - 1$$

$x - 29{,}7 = 51{,}7$ atau 308,3

$x = 81{,}4$ atau 338

Himpunan penyelesaian ialah $\{81{,}4, 338\}$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$3\cos x^0 + 4\sin x^0 = 5$, untuk $0 \le x < 360^0$

Jawab:

Misalkan $3\cos x^0 + 4\sin x^0 = k\cos\left(x - \alpha\right)^0$, $k > 0$

$$= k\left(\cos x^0 \cos\alpha^0 + \sin x^0 \sin\alpha^0\right)$$
$$= k\cos x^0 \cos\alpha^0 + k\sin x^0 \sin\alpha^0$$
$$= k\cos\alpha^0 \cos x^0 + k\sin\alpha^0 \sin x^0$$

Maka $\begin{cases} k\cos\alpha^0 = 3 \\ k\sin\alpha^0 = 4 \end{cases}$ $\quad k = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\tan\alpha^0 = \frac{4}{3} = 1{,}333 \Rightarrow \alpha = 53{,}1$, sebab terletak dikuadran I

Dengan demikian $3\cos x^0 + 4\sin x^0 = 5\cos\left(x - 53{,}1\right)^0$

Sehingga $5\cos\left(x - 53{,}1\right)^0 = 5$

$$\cos\left(x - 53{,}1\right)^0 = 1$$

$\rightarrow x - 53{,}1 = 0$ sehingga x = 53,1

Himpunan penyelesaian ialah $\{53{,}1\}$

<u>Contoh 3</u>

Selesaikan persamaan $\cos x - \sin x = -1$, untuk $0 \le x < 2\pi$.

Jawab:

Misalkan $\cos x - \sin x = k\cos\left(x - \alpha\right), k > 0$

$$= k\left(\cos x \cos\alpha + \sin x \sin\alpha\right)$$
$$= k\cos x \cos\alpha + k\sin x \sin\alpha$$
$$= k\cos\alpha \cos x + k\sin\alpha \sin x$$

Maka $\begin{cases} k\cos\alpha = 1 \\ k\sin\alpha = -1 \end{cases}$ $\quad k = \sqrt{1^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{2} = 5$

$\tan\alpha = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{4}\pi$, tangen $\alpha = -1$ terletak dikuadran IV

Dengan demikian $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{7}{4}\pi\right)$

Sehingga $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{7}{4}\pi\right) = -1$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow x - \frac{7}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + n.2\pi \quad atau \quad x - \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi + n.2\pi$$

Untuk n=-1, $\rightarrow x = \frac{1}{2}\pi \quad atau \quad x = \pi$

Himpunan penyelesaian ialah $\left\{\frac{1}{2}\pi, \pi\right\}$.

<u>Contoh 4</u>

Selesaikan persamaan $3\cos x^0 + 2\sin x^0 = 3$, untuk $0 \le x < 360$.

Jawab:

Misalkan $3\cos x^0 + 2\sin x^0 = k\cos(x - \alpha)^0$, $k > 0$

$$= k\left(\cos x^0 \cos\alpha^0 + \sin x^0 \sin\alpha^0\right)$$
$$= k\cos x^0 \cos\alpha^0 + k\sin x^0 \sin\alpha^0$$
$$= k\cos\alpha^0 \cos x^0 + k\sin\alpha^0 \sin x^0$$

Maka $\begin{cases} k\cos\alpha^0 = 3 \\ k\sin\alpha^0 = 2 \end{cases}$ $\quad k = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\tan\alpha^0 = \frac{2}{3} = 0{,}666 \Rightarrow \alpha = 33{,}7$, sebab α terletak dikuadran I

Dengan demikian $3\cos x^0 + 2\sin x^0 = \sqrt{13}\cos(x - 33{,}7)^0$

Sehingga $\sqrt{13}\cos(x-33,7)^0 = 3$

$$\cos(x-33,7)^0 = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,832$$

$\rightarrow (x-33,7) = 33,7 \quad atau \quad x = 67,4$

Atau $(x-33,7) = 326,3 \quad atau \quad x = 360$

Himpunan penyelesaian ialah $\{67,4,360\}$.

E. Dua Persamaan Dengan Dua Variabel

Bentuk persamaan dari dua persamaan dengan dua variabel dalam trigonometri adalah sebagai berikut:

a. $\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = p \end{cases}$

b. $\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = p \end{cases}$

c. $\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = p \end{cases}$

d. $\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = p \end{cases}$

X dan y : variabel

α : konstanta

P : konstanta (skalar)

Cara penyelesaian sistem tersebut di atas ialah dengan menggunakan metode eliminasi atau metode substitusi, yaitu:

1) X atau y dipisahkan dari persamaan pertama, kemudian dimasukkan kepersamaan kedua
2) Persamaan kedua diubah, kemudian $x \pm y$ atau α dimasukkan.

Contoh 1

Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x^0 + y^0 = 120^0 \\ \sin x^0 + \sin y^0 = 1{,}5 \end{cases}$ untuk $x, y \in R$

Jawab:

$$x^0 + y^0 = 120^0 \Rightarrow y^0 = 120^0 - x^0$$

$$\sin x^0 + \sin y^0 = 1{,}5 \Leftrightarrow \sin x^0 + \sin\left(120^0 - x^0\right) = 1{,}5$$

$$2\sin 60^0 \cos\left(60^0 + x^0\right) = 1{,}5$$

$$2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(60^0 + x^0\right) = 1{,}5$$

$$\sqrt{3}\cos\left(60^0 + x^0\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos\left(60^0 + x^0\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-60 + x = 30 + n.360 \ atau$$

$$-60 + x = 330 + n.360, n \in B$$

Jadi penyelesaiannya ialah $x = 90 + n.360$ atau $x = 390 + n.360, n \in B$.

<u>Contoh 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ untuk x

dan y dikuadran I.

Jawab:

$$x + y = \frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{3+2}{3-2}$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)}=5$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+y)\cot\tfrac{1}{2}(x-y)=5$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x+y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}=5$$

$$\frac{\tan\frac{1}{3}\pi}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}=5$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}=5$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{5}=0{,}346$$

$$\tfrac{1}{2}(x-y)=0{,}11\pi$$

$$x-y=0{,}22\pi$$

$$\begin{array}{ll} x+y=\frac{2}{3}\pi=0{,}66\pi & \\ x-y \qquad\quad =0{,}22\pi & \\ \hline 2x=0{,}88\pi \Rightarrow x=0{,}44\pi & + \end{array}$$

Karena $x=0{,}44\pi$ maka $y=0{,}22\pi$

Jadi himpunan penyelesaiannya ialah $\{0{,}44\pi, 0{,}22\pi\}$

<u>Contoh 3</u>

Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, diketahui hubungan

$12\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma=1$. Tentukan besar sudut α dan γ .

Jawab:

$$12\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma=1$$

$$12\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin 45^0=1$$

$$6\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta=1$$

$$3\sqrt{2}.2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta=1$$

$$3\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)=1$$

$$3\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos 45^0\right)=1$$

$$3\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

$$3\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-3=1$$

$$3\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=4$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{4}{3\sqrt{2}}=0{,}943\Rightarrow\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=19{,}5^0$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=45^0$$

$$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=19{,}5^0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ +$$

$\alpha = 64,5^0$ dan $\beta = 25,5^0$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 2\pi$.

   a. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 12
   b. $\sin 2x = 1$
   c. $\sin x = \frac{1}{2}$
   d. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   e. $\tan x = 1$
   f. $\cos 2x = 0$
   g. $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   h. $\tan x = \sqrt{3}$
   i. $\cos x = \frac{-1}{2}$
   j. $\tan x = 0$
   k. $\cos x = \frac{-1}{2}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 360$.

   a. $\cos 4x^0 + \cos 2x^0 = 0$
   b. $\cos x^0 + \cos 3x^0 = \sin x^0 + \sin 3x^0$
   c. $\sin 3x^0 + \sin x^0 = \sin 2x^0$
   d. $\tan 2x^0 + \tan x^0 = \tan 3x^0$
   e. $\sin 5x^0 + \sin x^0 = 0$

3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 2\pi$.

   a. $\sin 3x + \cos x = \sin x + \cos 3x$
   b. $\sin 4x - \cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$
   c. $\sin 2x = \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$
   d. $\tan 2x - \tan x = \frac{4\sec 2x}{1 + \cot^2 x}$

4. Tentukan *p* agar persamaan-persamaan berikut dapat diselesaikan.

a. $\cos(x+60)^0 \cos x^0 = 4p$

b. $\cos(x+45)^0 \cos(x+15)^0 = p$

c. $\sin(x+25)^0 \cos(x-35)^0 = p$

d. $\sin(x+45)^0 \cos(x+15)^0 = p$

5. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 360$.

a. $\cos 2x^0 - \cos x^0 = 0$

b. $\cos 2x^0 - 3\sin x^0 - 1 = 0$

c. $\cos 2x^0 - 4\sin x^0 + 5 = 0$

d. $2\sin^2 x^0 + 6\sin^2 \frac{1}{2}x^0 = 3$

e. $3 + \cos 4x^0 = 8\cos 2x^0$

f. $\cos 2x^0 + \cos x^0 - 2 = 0$

g. $5\cos 2x^0 - 12\sin x^0 + 11 = 0$

h. $3\cos 2x^0 - 10\cos x^0 + 7 = 0$

i. $16\cos x^0 \cos 3x^0 + 5 = 0$

j. $\tan x^0 + \tan(45+x)^0 = 2$

6. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 2\pi$.

a. $\cos 2x - \sin x = 0$

b. $\cos x + \cos 2x = 2\sin^2 x - 51$

c. $\cos 4x - \cos 2x = 0$

d. $\cos 2x + 2\cos^2 x = 2\sin x + 1$

e. $\tan x + \cot x + 2 = 0$

f. $2\cos 2x + 3\sin x = 1$

g. $2\sin 6x \sin 2x - 1 = 0$

h. $2\cos 3x \cos x + 1 = 0$

7. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 360$.

a. $2\cos x^0 + 2\sin x^0 = 1$

b. $\sqrt{3}\cos x^0 + \sin x^0 = 1$

c. $\cos 2x^0 + \sin 2x^0 + 1 = 0$

d. $\cos x^0 - \sqrt{3}\sin x^0 - 1 = 0$

e. $2\cos x^0 - \sin x^0 - \sqrt{5} = 0$

f. $\cos x^0 + \sqrt{3}\sin x^0 = 1$

g. $3\cos 2x^0 + 4\sin 2x^0 = 5$

h. $15\cos x^0 + 8\sin x^0 = 17$

i. $5\cos x^0 - 15\sin x^0 = 13$

j. $9\cos x^0 + 40\sin x^0 = 0$

8. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut untuk $0 \le x < 2\pi$.

a. $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

b. $2\cos x - 3\sin x = 4$

c. $\cos x + \sin x = -1$

d. $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = 2\cos x$

e. $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 2\sin x$

9. Tentukan p agar sistem persamaan $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ \cos x - \cos y = p \end{cases}$ mempunyai penyelesaian.

10. Tentukan p yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} 2\sin x + p\cos x = p - 1 \\ p\sin x - 2\cos x = 3 \end{cases}$

11. Selesaikan sistem persamaan-sistem persamaan berikut, untuk x^0 dan y^0 dikuadran I, $x, y \in R$.

a. $\begin{cases} x^0 - y^0 = 70^0 \\ \sin x^0 \sin y^0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^0 - y^0 = 15^0 \\ \cos x^0 \cos y^0 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \tan x^0 = 2\cos y^0 \\ \sec x^0 = 2\sin y^0 + 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \cos x^0 \cos y^0 + \sin x^0 \sin y^0 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sin x^0}{\sin y^0} = 2,732 \end{cases}$

12. Pada segitiga *ABC*, diketahui hubungan

$\begin{cases} a\cos A = b\cos B \\ \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tentukan besar sudut-sudut segitiga itu.

13. Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, diketahui $b + c = 3a$. Tentukan besar sudut A dan sudut B dari segitiga ABC itu.

14. Buktikan bahwa segitiga ABC sama kaki apabila diketahui hubungan $\cos A \cos C + \cos B \cos 2A = 0$

15. Buktikan bahwa segitiga ABC siku-siku apabila diketahui hubungan $\sin 2A + \sin 2B = \sin C$.

BAB V
PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

Pada dasaranya untuk menyelesaikan pertidaksamaan trigonometri adalah dengan cara menyelesaikan pertidaksamaan aljabar. Hanya pada pertidaksamman yang dibicarakan adalah variabel yang menyatakan bilangan (skalar), sedang pada pertidaksamaan trigonometri variabel menyatakan besarnya sudut. Karena sifat periodiknya fungsi trigonometri maka penyelesaian (daerah penyelesaian) dapat digambarkan dengan lingkaran.

Menyelesaikan pertidaksamaan trigonometri dapat digunakan pertolongan garis bilangan atau lingkaran bilangan. Dengan garis bilangan,

- Keuntungan: penyebaran variavel (x) dapat bebeas dari negatif hingga positif
- Kelemahan: ulangan (periodesasi) tidak dapat dilihat langsung tanpa menggambar grafiknya.

Dengan lingkaran bilangan,

- Keuntungan: ulangan (periodisasi) dapat langsung terlihat.
- Kelemahan : penyebaran variabel (x) tidak dapat dibahas.

Lakukan dengan langkah-langkah

1). Ruas kanan dijadikan nol,

2). Ruas kiri difaktorkan

3). Dicari harga nol/tidak berhingga yang diperolah denganmenyamakan setiap faktor dengan nol/tidak berhingga. Bila faktor dari pembilang diperoleh harga nol, faktor dari penyebut diperoleh harga tak berhingga.

4). Harga-harga yang diperoleh tersebut pada butir (3) dipasang pada garis bilanga/ lingkaran bilangan. Titik-titik tersebut menjadi titik batas.

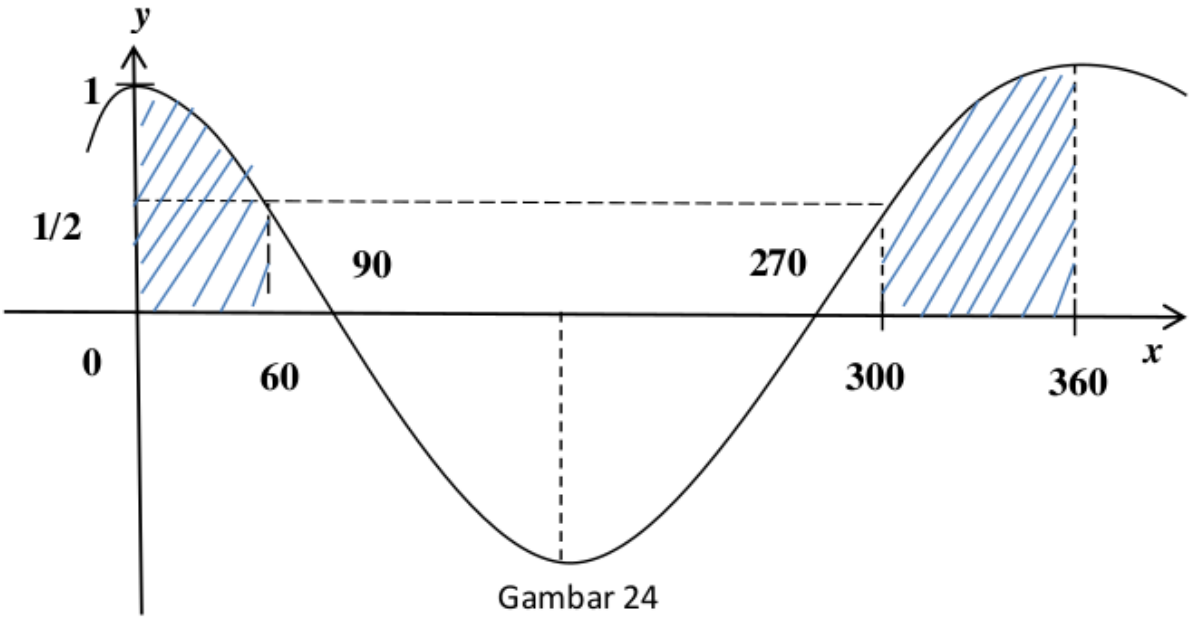
5). Ditentukan tanda-tanda setiap interval/daerah yang terjadi. Tabelkan daerah yang memenuhi ata yang sesuai dengan ketentuan.

6). Ambilah daerah yang memenuhi tersebut, dan itulah jawabannya.

Contoh. 1.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\cos x^0 \geq \frac{1}{2}\ untuk\ 0 \leq x \leq 360$.

Jawab : cara 1. $\cos x^0 = \frac{1}{2}, \longrightarrow\ x = 60\ atau\ x = 300$

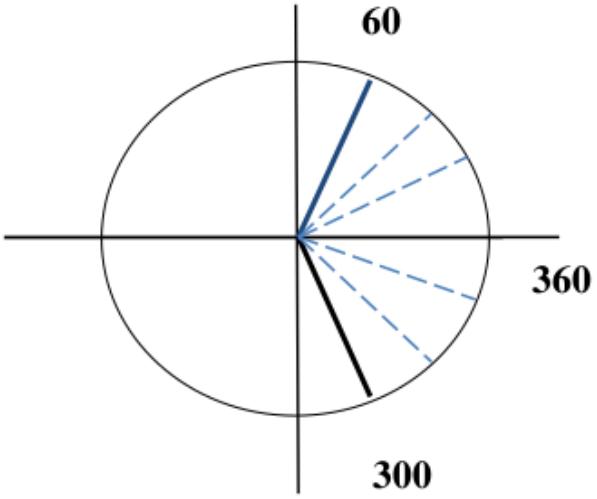


Gambar 24

Terlihat pada gambar bahwa $\cos x^0 > \frac{1}{2}$ jika $0 \leq x \leq 60$, atau $300 \leq x \leq 360,\ x \in R$

Jadi himpunan penyelsaiannya ialah { x / 0 ≤ x ≤ 60 } U { x / 300 ≤ x ≤ 360 }.

Cara II. $\cos x^0 = \frac{1}{2}$, $\Longrightarrow x = 60$ atau $x = 300$



Daerah penyelesaian ialah daerah yang diarsir

Gambar 25

Terlihat pada gambar 26 daerah x yang memenuhi dari 0 hingga 60 dan dari 300 hingga 360.

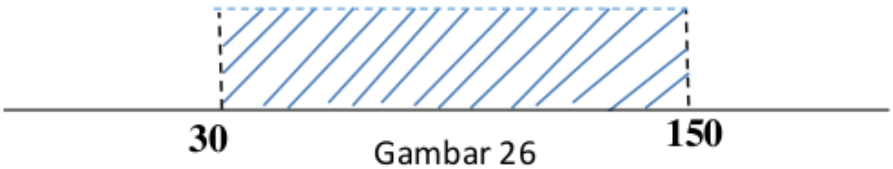
Jadi himpunan penyelesaiannya ialah { x / 0 ≤ x ≤ 60 } U { x / 300 ≤ x ≤ 360 }.

Contoh.2.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sin x^0 \geq \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq x\ 360$.

Jawab :

Cara I. $\sin x^0 = \frac{1}{2}, \quad ===> x = 30\ atau\ x = 150$



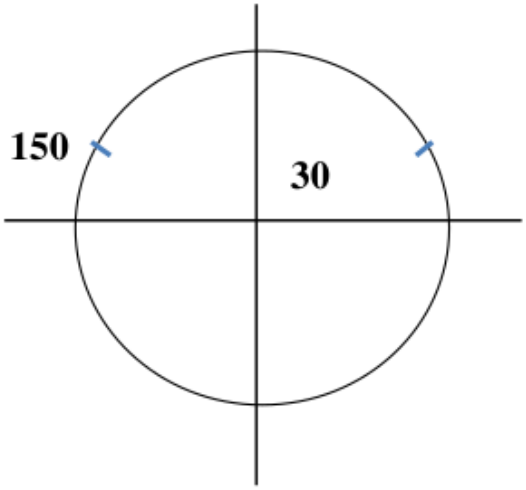
Gambar 26

Terlihat pada grafik daerah x yang memenuhi ialah dari 30 hingga 150.

Jadi himpunan penyelesaiannya ialah {x / 30 $\leq x \leq 150$}

Cara II.

$$\sin x^0 = \frac{1}{2}, \quad ===> x = 30 \text{ atau } x = 150$$



Gambar 27

Terlihat pada gambar daerah x yang memenuhi $\sin x^0 \geq \frac{1}{2}$, ialah 30 hingga 150 .

Jadi himpunan penyelesaiannya ialah {x / 30 $\leq x \leq 150$}

Contoh 30

tentukan himpunan penylesaian pertidaksamaan $\sin 2x^2 - \frac{1}{2} \leq 0, \ untuk\ 0 \leq x \leq 360$

jawab : $\sin 2x^0 - \frac{1}{2} = 0$

$$\sin 2x^0 = \frac{1}{2}, \quad ===> 2x = 30 + n.360\ atau\ 2x = 130 + n.360$$

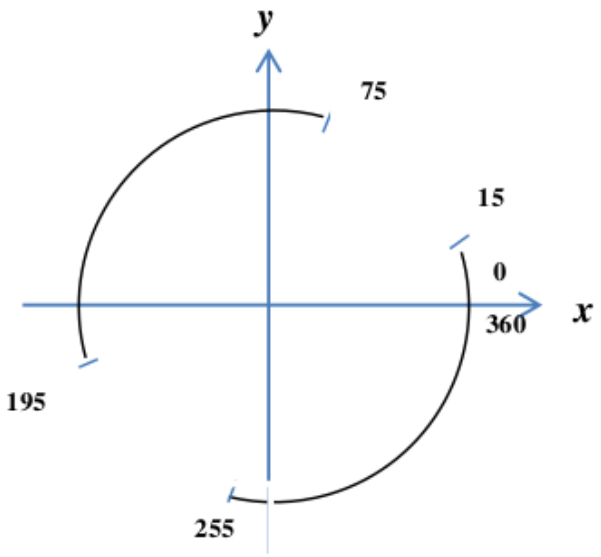
$$x = 15 + n.18\ atau\ x = 75 + n.180$$

Maka harga-harga batasnya :

15, 75, 195, 285.

Untuk $x = 0, ===> \sin 0^0 - \frac{1}{2} \leq 0.$

$-\frac{1}{2} \leq 0$, benar



Gambar 28

Dari gambar terlihat daerah *x* yang memenuhi ialah :

$0 \leq x \leq 15$, $75 \leq x \leq 195$, dan $255 \leq x \leq 360$.

Jadi himpunan penyelesaian ialah

{x / $0 \leq x \leq 15$} U {x / $75 \leq x \leq 195$} U {x / $255 \leq x \leq 360$}

<u>Contoh 4</u>

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $\cos\frac{1}{2}x^0 - \frac{1}{2}\ untuk\ 0 \leq x \leq 360.$

Jawab:

$$\cos\frac{1}{2}\ x^0 - \frac{1}{2} = 0$$

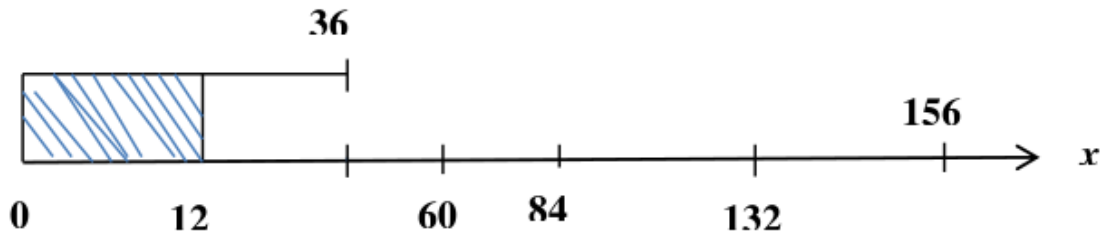
$$\cos\frac{1}{2}x^0 = \frac{1}{2}, \quad ===> \frac{1}{2}x = 60 + n.360 \; atau \frac{1}{2}x = 300 + n.30$$

$x = 120 + n.720$ atau $x = 600 + n.720$

Harga – harga batas yang memenuhi ialah 120.

$$untuk\ x = 0, ===> \cos 0^0 - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$1 - \frac{1}{2} > 0, \text{benar.}$$



Gambar 29

Dari garis bilangan di atas, maka daerah x yang memenuhi ialah $0 \leq x \leq 120$.

Jadi penyelesaiannya ialah $0 \leq x \leq 120$.

<u>Contoh 5</u>

Selesaiakanlah pertidaksamaan $2\sin 2x + 2\sin x \geq 2\cos x + 1, untuk\ 0 \leq x \leq 2\pi$.

Jawab :

$2\sin 2x + 2\sin x \geq 2\cos x + 1$

$2\sin 2x + 2\sin x - 2\cos x - 1 \geq 0$

$4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 \geq 0$

$2\sin x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) \geq 0$

$(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) \geq 0$

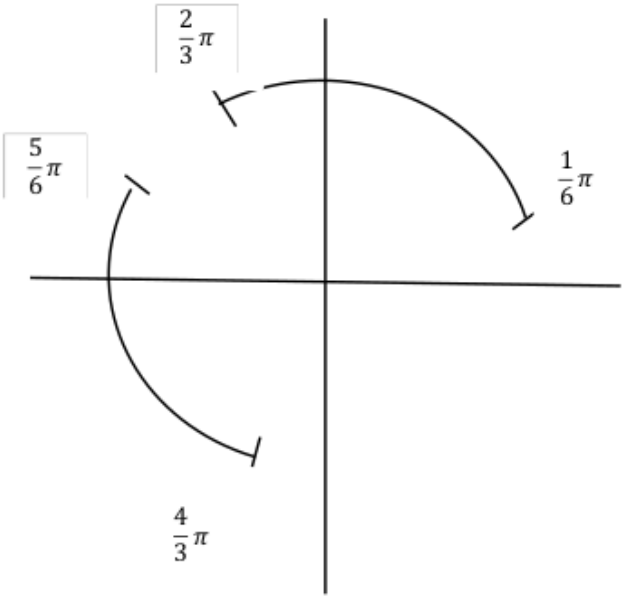
Harga – harga nol :

$2\sin x - 1 = 0$ atau $2\cos x + 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}\, dan\ x = \frac{1}{6}\pi\ atau\ x = \frac{5}{6}\pi.$

$\sin x - \frac{1}{2}\, dan\ x = \frac{2}{3}\pi\ atau\ x = \frac{4}{3}\pi$



Gambar 30

Daerah yang memenuhi :

$x = 0, \qquad ==> 2\sin 0 + \sin 0 - 2\sin\cos 0 - 1 \ \geq 0$

$-2 - 1 \ \geq 0$

$-3 \ \geq 0, salah.$

Maka,

$\frac{1}{6}\pi \ \leq x \ \leq \frac{2}{3}\pi$

$\frac{5}{6}\pi \ \leq x \ \leq \frac{3}{4}\pi$

<u>Contoh 6</u>

Selesaikan $\frac{\sin x + \frac{1}{2}}{\cos x} < \frac{1}{\cos x}$. untuk $0 \ \leq x \ \leq 2\pi.$

Jawab :

$$\frac{\sin x+\frac{1}{2}}{\cos x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x+\frac{1}{2}-1}{\cos x} < 0$$

$$\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{cos\, x} < 0$$

Harga nol : $\sin x - \frac{1}{2} = 0$, $\cos x \neq \frac{1}{2}\pi , \frac{3}{2}\pi$

$$\sin x = \frac{1}{2} ===> x = \frac{1}{6}\pi \; atau \; x = \frac{5}{6}\pi$$

Harga tak berhingga :

$$\cos x = 0, ===> x = \frac{1}{2}\pi \; atau \; x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin x - \frac{1}{2} \neq . => x \neq \frac{1}{6}\pi , \frac{5}{6}\pi$$

Maksimum $= 4, untuk \sin\ (2x + 53{,}1)\,° = 1$

$$2x + 53{,}1 = 90 + n.360.$$

$$2x + 36{,}9 + n.360.$$

$$x = 18{,}45, + n.180, n = 0{,}1.$$

atau $x = 18{,}45, 198{,}45.$

Minimum $= 6, untuk \sin\ (2x + 53{,}1)\,° = -1$

$$2x + 53{,}1 = 270 + n.360.$$

$$2x + 216{,}9 + n.360.$$

$$x = 108{,}45, + n.180, n = 0{,}1.$$

atau $x = 108{,}45, 288{,}45.$

Contoh 5

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = cos\, x° - sin\, x°$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

Misalkan $\cos x\,° - \sin x° = k \cos\ (x+\propto)\,°$.

$$= k\cos x^\circ \cos \propto^\circ - k\sin x^\circ \sin \propto$$
$$= k\cos \propto^\circ \cos x^\circ - k\sin \propto^\circ \sin x^\circ$$

Maka,

$$k\ cos \propto^\circ = 1$$
$$k\ sin \propto^\circ = 1$$
$$k = V2$$
$$tg \propto^\circ = 1, ===> \propto = 45$$
$$f(x) = V2\cos(x+45)^\circ.$$

Maksimum $f(x) = V2, untuk \cos(x+45)^\circ = 1$

$$x + 45 = 0 + n.360.$$
$$x = -45 + n.360, n = 1$$
$$\text{atau} \quad x = 315.$$

Minimum $f(x) = -V2, untuk \cos(x+45)^\circ = -1$

$$x + 45 = 180 + n.360, ===> x = 135, n = 0.$$

4). $a\ sin^2\ x + \sin x + c$

Bentuk ini dapat dicari ekstrimnya dengan cara sebagai berikut:

$$a\ sin^2\ x + \sin x + c = a(sin^2 x + {}^{b}/_{a}\ \sin x + b^2/4a^2) + c - b^2/4a.$$
$$= a(\sin x + b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Bentuk $a(\sin x + b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a(\sin x + p)^2 + q$, dimana $p = \frac{b}{2a}, dan\ q = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Selanjutnya diselediki ekstrin dari bentuk $a(+\sin x\, p)^2 + q$, sebagai berikut:

1. > 0 : $p \geq 1$, maksimum mutlak $= a(1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$.

   Minimum mutlak $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

   $0 \leq p \leq 1$, maksimum mutlak $= a(1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$

   Minimum mutlak q, untuk $\sin x = -p$

   Minimum relatif $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

P = 0, maksimum mutlak = $a + q$, untuk $\sin x = 1\ atau \sin x = -1$

Minimum mutlak $= q$, untuk $\sin x = 0$

$-1 < p < 0$, maksimum mutlak $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.
Minimum mutlak $= q$, untuk $\sin x = -p$.
Maksimum relatif $= a(1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$

$p \leq -1$ maksimum mutlak $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.
Minimum mutlak $= a(1+p)^2 + q$ untuk $\sin x = 1$.

2. $a < 0$, keadaan (1) maksimum diganti minimum dan minimum diganti maksimum,

Contoh 1

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -4sin^2\, x^0 + 4\sin x^0 + 2$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

$$f(x) = -4sin^2\, x^0 + 4\sin x^0 + 2,$$
$$= -4(sin^2\, x^0 + \sin x^0 + 1/4) + 3,$$
$$= -4sin\, x^0 - 1/\,2^2 + 3,$$

Maksimum mutlak $f(x) = 3$, untuk $\sin x^0\, 1/2$

$$x = 30, 150$$

Minimum mutlak $= -6$, untuk $\sin x^0 + -1$,

$$x = 270.$$

Minimum relatif = 2 untuk $\sin x^0 + 1$,

$$x = 90.$$

Contoh 2

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = sin^2 x + 4\sin x + 4$, untuk $0 \leq x < 2\pi$.

Jawab:

$$f(x) = sin^2 x + 4\sin x + 4$$
$$= (\sin x + 2)^2$$

Maksimum mutlak $f(x) = 9$, untuk $\sin x = 1$

$$x = 1/2\pi$$

Minimum mutlak $f(x) = 1$ untuk $\sin x = 1$

$$x = 3/2\pi.$$

5. $a\ cos^2 x + b \cos x + c$

Cara mencari penyelesaian dari ekstrim fungsi kuadrat dalam $cos^2 x + b \cos x + c$ ini, sama dengan bentuk (4) di atas yaitu :

$$f(x) = a\ cos^2 x + b \cos x + c$$

$$= a\ (\cos x + b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

<u>Contoh 1</u>

Tentukan ekstrim dari harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\ cos^2 x^0 + 3$,.untuk $0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

$f(x) = 2\ cos^2 x^0 + 3$,.

$= 2\left(cos^2 x^0 + cos\ x^0 + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}$.

= $2(cosx^0 + \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2}$.

Maksimum mutlak $f(x)$ =? Untuk $cos\ x^0 = 1, === x = 0, 360$

Minimum relatif $f(x) = 3$ Untuk $cos\ x^0 = -1, === x = 180$

Minimum mutlak $f(x) = 5/2$, Untuk $cos\ x^0 = -1/2, == x = 120{,}240$.

6. $a\ tg^2 x + b\ tg\ x + c$

Karena $tg\ x$ dapat mencapai positif tak hingga dan negatif tak hingga $(\pm \sim)$, maka fungsi ini sifat ekstrimnya tidak terikat pada harga $tg\ x$, tetapi sifat ekstrimnya dapat dipikirkan seperti ekstrim pada fungsi aljabar $ax^2 + bx + c$.

$$a\ tg^2 x + b\ tg\ x + c = a(tg\ x + b/2a)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$a > 0$: Minimum mutlak $= \frac{4ac-b^2}{4a}$, untuk $tg\ x = -h/2a$

Tidak mempunyai maksimum (karena mencapai $(+\sim)$,

$a < 0$: Minimum mutlak $= \frac{4ac-b^2}{4a}$, untuk $tg\ x = -h/2a$

Tidak mempunyai maksimum (karena mencapai $(-\sim)$.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan eksrin dan harga x yang bersangkan dari fungsi $f(x) = -2\ tg^2 + 3\ tg\ x^0 - 1$, untuk $0 \leq x < 180$.

Jawab:

$a = -2 < 0$, maka maksimum mutlak $f(x) = \frac{4(-2)(-1)-(3)^2}{4(-2)}$

$$= 1/8,$$

Untuk $tg\ x^0 = \frac{-3}{2(-2)} = 0{,}750 ===> x = 36{,}9.$

Contoh 2

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 3\ tg^2 x^0 - 2\ tg\ x^0 + 4$, untuk $0 \leq x < 180$.

Jawab:

$a = 2 > 0$, maka minimum $f(x) = \frac{4(3)(4)-(2)^2}{4(3)} = 3\frac{2}{3}$

Untuk $tg\ x^0 = \frac{-2}{2(3)} = 40,333$

$x = 20,4.$

2). EKSTRIM DENGAN SYARAT

Yang dimaksud dengan syarat disini adalah hubungan yang harus dipenuhi antara sudut-sudut yang dibicarakan. Jika yang dibicarakan sudut-sudut segitiga (, ,) maka banyak memberi pertolongan dalam perhitungan bahwa dua sudut diantaranya berlaku :

$$\boxed{0 \leq \text{ł} \propto -I^3 \text{ł} < \propto +\beta}$$

Contoh 1.

Pada segitiga ABC diketahui $3\ sin \propto \sin\beta = 1$. Tentukan γ maksimum.

Jawab :

$$\propto +\beta + \sigma = 180°, ===> \propto + \delta = 180° - \delta.$$
$$3 \sin \propto \sin\beta = 1$$
$$3/2\ (2 \sin \propto \sin\beta) = 1$$
$$2 \sin \propto \sin\beta = 2/3$$
$$\cos(\propto -\beta) - \cos(\propto +\beta) = 2/3$$
$$\cos(\propto -\beta) - \cos(180° - \delta) = 2/3$$
$$\cos(\propto -\beta + \cos\delta = 2/3$$
$$\cos\delta = \frac{2}{3} - \cos(\propto -\beta)$$

δ maksimum, jika $\cos\delta$ minimum, berarti $\cos(\propto -\beta)$ harus maksimum. Dan maksimum $\cos(\propto -\beta) = 1$. Maka, $\cos\delta = \frac{2}{3} - 1 = -0{,}333$

$$\delta = 109{,}47°.$$

Contoh 2.

Pada soal tiga ABC berlaku $cos \propto, cos\beta = 1$, tentukanlah:

a. Batas-batas δ
b. δ minimum

Jawab :

$\cos \propto + \cos \beta = 1$

$2 \cos \frac{1}{2}(\propto + \beta) = 1$

$2\ sin \frac{1}{2}(\propto - \beta) = 1$

$cos \frac{1}{2}(\propto - \beta = \frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}}$

$0° < \frac{1}{2} I \propto - \beta\ I < \frac{1}{2}(\propto + \beta)$

$\cos 0° > cos \frac{1}{2}(\propto - \beta) > cos \frac{1}{2}(\propto + \beta)$. Selang $0° \leq x^0 \leq 180°$ sudut makin besar $cos\ x^0$ makin kecil.

$1 > cos \frac{1}{2}(\propto - \beta) > sin \frac{1}{2}\delta$

$1 > \frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}}$

1). $\frac{1}{2 \sin 1/2\delta} < 1$

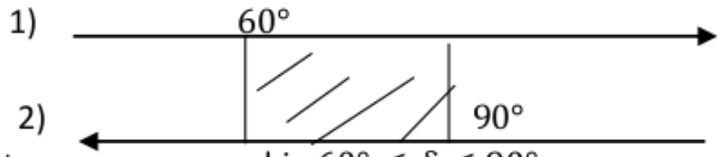
$sin \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}$

Batas : $sin \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2} ==> \delta = 60°$

2). $\frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}} > sin \frac{1}{2}\delta$

$sin^2 \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}$

Batas : $\delta = 90°$.



a. batas-batas yang memenuhi : $60° \leq \delta \leq 90°$.

b. jadi δ minimum = 60°

Contoh 3.

Tentukan maksimum $(\sin x^\circ + \sin y^\circ)$, serta harga-harga x dan y bila $x^\circ + y^\circ = 60^\circ, x > 0\ dan\ y > 0$.

Jawab:

$$\sin x^\circ + \sin y^\circ = 2\sin\tfrac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)\cos\tfrac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$$

$$= 2\sin 30^\circ \cos\tfrac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}(x^\circ - y^\circ$$

Maksimum $(\sin x^\circ + \sin y^\circ) = 1$, untuk $\cos\frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ) = 1$

$$\tfrac{1}{2}(x^\circ - y^\circ) = 0^\circ$$

$$x^\circ - y^\circ = 0^\circ$$

$$x + y = 60$$

$$x - y = 0$$

$$2x = 60, ==> x = 30$$

$$y = 30.$$

LATIHAN SOAL!

1). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -2\sin x^\circ + 4$ untuk $0 \le x \le 360$.

2). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\sin 3x - 4$, untuk $0 \le x \le \pi$.

3). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = sin^2 x^\circ + 3\sin 2x^\circ - 2$ untuk $0 \le x \le 360$.

4). Jika $y = sin^2 x - 2\sin x + 2$, Tentukan y ekstrim dan harga x yang bersangkutan pada saat ekstrin tersebut bila $-\pi \le x \le \pi$.

5). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 4sin^2 x^\circ - 4\sin x^\circ - 6$ untuk $0 \le x \le 360$.

6). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 3\cos 2x^\circ - 5$ untuk $0 \le x \le 360$

7). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2cos^2 x - 2\cos x + 1$untuk $-\pi \le x \le \pi$.

8). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $y = -2cos^2x - 2\cos x° + 2\cos x° - 1/2$ untuk $0 \leq x \leq 360$.

9). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $y = 6\,cos^2x° + 4\cos x° - 5$untuk $0 \leq x \leq 360$.

10). Pada segitiga ABC, $c = 50°$, jari − jari lingkaran luarnya $5\,cm$. Bila c bergerak pada busur AB, carilah harga maksimum keliling segitiga tersebut.

11). Jika $x° + y° = 60$ tentukan x dan supaya $sin^2\,x° + sin^2y°$ mencapai ekstrim. Tentukan pula ekstrim tersebut.

12). Pada segitiga ABC, b + c = 2a. tentukanlah ∝ maksimum.

13). Pada segitiga ABC, $\cos\frac{1}{2} \propto = 4\sin\frac{1}{2\beta}\sin\frac{1}{2\delta}$

a. tentukanlah batas-batas ∝

b. tentukanlah ∝ maksimum

14). Pada segitiga ABC, $tg \propto + tg\beta = 1$.

a. tentukanlah batas-batas δ

b. tentukanlah δ maksimum

15).). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\,tg^2x - 3\tan x° + 1$untuk $0 \leq x \leq 180$.

16). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -3\,tg^2x° + 2\tan x° + 4$ untuk $0 \leq x \leq 180$.

17). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = \frac{2}{tg^2x° - 3tg\,x° + 2}$ untuk $0 \leq x \leq 180$.

18). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $\sin x° \sin bila\ x° - 90°, 0 < x < 180, 0 < y < 180$.

19). Pada segitiga ABC, garis tinggi dari titik A = jari-jari lingkaran luarnya. Tentukan ∝ maksimum.

20). Pada segitiga ABC, A = 50°, jari-jari lingkaran luarnya 5cm. tentukan luas maksimum segitiga itu.

BAB VI
EKSTRIM FUNGSI TRIGONOMETRI DAN EKSTRIM DENGAN SYARAT

A. Ekstrim Fungsi Trigonometri

Istilah ektrim mengandung arti maksimum dan minimum, terbesar dan terkecil, tertinggi dan terendah, terbanyak dan tersedikit, teratas dan terbawah.

Dalam membicarakan nilai meksimum dan minimum fungsi trigonometri khususnya fungsi sinus dan kosinus perlu pengertian tetnang periodesasi fungsi-fungsi itu. Setiap penambahan atau pengurangan sudut dengan $n.2\pi$, harga-harga sinus atau kosinus adalah kembali sama dengan sinus atau kosinus sudut semula.

Singkatnya,

$\sin(x \pm n.2\pi) = \sin x$, atau $\cos\ (x \pm n.2\pi) = \cos x\ .\ n\ bilangan\ bulat.$

Dikatakan periode sinus atau kosinus adalah 2π. Akan tetapi berapapun harga x, harga sin x dan cos x tidak akan lebih dari 1 dan tidak kan kurang dari -1. Dengan kata lain $-1 \leq \sin x \leq 1, dan -1 \leq \cos x \leq 1$. Dengan demikian nilai maksimuam sinus dan kosinus adalah 1, dan minimumnya adalah -1.

Berdasarkan dengan pengertian diatas, maka dapat dibicarakan ekstrim fungsi trigonometri sebagai berikut:

1). $a \sin x + b, dalam\ \ interval\ 0 \leq x \leq 2\pi.$

Kemungkinan : $a \sin x + b\ maksimum = a + b, untuk \sin x = 1. ===> x = \frac{1}{2}\pi.$

(1) a > 0, $a \sin x + b\ minimum = -a + b, untuk \sin x = -1, =$

$==>$ $x = \frac{3}{2}\pi.$

b disebut minimum batas, untuk x = 0.

(2) a < 0, $a \sin x + b\ minimum\ \ a + b,\ untuk \sin x = 1, ==>$

$x = \frac{3}{2}\pi$

$a \sin x + b\ maksimum = -a + b, untuk\ \sin x = -1. ==> x = \frac{3}{2}\pi$

Maksimum dan minimum pada 1) dan 2) disebut maksimum dan minimum mutlak, sebab tidak ada x yang menyebabkan $a \sin x +$

$b\ lebih\ besar\ dari\ n + b\ atau\ lebih\ kecil\ dari - a + b.$

<u>Contoh 1.</u>

Dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi\ maksimum \sin 3x\ adalah\ 1, untuk\ x =$

$\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi. bersifat\ mutlak.\ dan\ minimum \sin 3x\ adalah -$

$1, untuk\ x = \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, bersifat\ mutlak. untuk\ x = 0, \sin 3x =$

$0, berarti\ minimum\ batsnya = 0.$

<u>Contoh 2.</u>

Jika $y = 3 \sin x^0 - 5\ maka\ y\ maksimum\ mutlak = -2, untuk \sin x^0 =$

$1, \quad ===> x = 90 + n.360,\ n \in B. dan\ y\ minimum\ mutlak =$

$-8, untuk \sin x^0 = -1 ===> x = 270 + n.360\ , n \in B.$

Contoh 3.

Jika $f(x) = 2 \sin 2x^0, maka\ f(x)\ maksimum\ mutlak =$

$2, untuk \sin 2x^0 = 1 ===> 2x = 90 + n.360$

$x = 45 + n.180, n \in B.$

$Dan\ f\ (x) minimum = -2, untuk \sin 2x^0 = -1,$

$2x = 270 + n.360$

$x = 135 + n.180, n \in B.$

2). $a \cos x + b, dalam\ interval\ 0 + x < 2\pi.$

Kemungkinan : (1). a > 0, $a \cos x + b\ maksimum = a + b, untuk \cos x = 1,$ ===> $x = 0$

$a \cos x + b$, minimum $= -a + b$, untuk $\cos x = -1,$ ===> $x = \pi$

b disebut minimum batas, untuk *x* = 0.

(2). a < 0, $a \cos x + b\ maksimum = a + b. untuk \cos x = 1.$ ===> x = 0

$a \cos x + b\ maksimum = -a + b, untuk \cos x + -1,$ ===> $x = \pi.$

b disebut maksimum batas untuk x = 0.

Contoh 1

Jika $y = 2 \cos 3x + 4, maka\ y\ maksimum\ mutlak = 6, untuk \cos 3x = 1,$ ===> $3x = 0 + n.2\pi.$

$$x = 0 + n.\frac{2}{3}\pi, n \in B.$$

dan *y* minimum mutlak = 2, untuk cos 3x = -1

===> $3x = \pi + n.2\pi.$

$$x = \frac{1}{3}\pi + n.\frac{2}{3}\pi\ n \in B.$$

Contoh 2

Jika $y = -3 \cos 2x^0 + 5$, maka y maksimum mutlak $= 8$, untuk $\cos 2x^0 = -1,$ ===> $2x = 180 + n.360.$

$$x = 90 + n.180, n \in B$$

dan y maksimum mutlak $= 2$, untuk $\cos 2x^0 = 1$

=> $2x = 0 + n.360.$

$$x = 0 + n.180, n \in B$$

3

3) $a \cos x^0 + b \sin x^0$

Bentuk $a \cos x^0 + b \sin x^0$ dijadikan bentuk tunggal seperti pada persamaan trigonometri, yaitu $k \cos(x - \propto)^0$. Kemudian di cari nilai maksimum atau minimum dari bentuk tunggal tersebut.

<u>Contoh 1</u>

Diketahui fungsi $f\ (x) = \cos x^0 + \sin x^0, dan\ 0\ \leq x\ < 360$

Ditanyakan :

a. nilai maksimum f(x) dan harga-harga x yang bersangkutan

b. nilai minimum f (x) dan harga-harga x yang bersangkutan

c. harga-harga x yang menjadikan f (x) = 0.

Jawab :

$f(x) = \cos x^0 + \sin x^0, ===> a = 1,\ \ b = 1.$

$k\ = V(1^2 + 1^2) = V2.$

$tg\ \propto = 1, ===>\ \propto = 45$

Maka, $f(x) = V2 \cos(X - 45)^0.$

a. Maksimum f (x) = V2, untuk $\cos(x - 45)^0 = 1$

$x - 45 = 0$

$x = 45.$

b. Minimum f(x) = -V2, untuk $\cos(x - 45)^0 = -1$

$x - 45 = 180$

$x = 225.$

c. F(x) = 0, untuk $\cos\ (x - 45)^0 = 0$

$x - 45 = 90$ atau 270

x = 135 atau 315

Contoh 2

Tentukan nilai maksimum dan minimum funfsi $y = 3\cos x + \sin x,\ untuk\ 0\ \leq x < 2\pi.$

Jawab :

$y = V3\cos x + \sin x, ===> a = V3,\ \ b = 1$

$k = V\ ((V3)^2 + (1)^2) = 2$

$tg\ \ \propto = \frac{1}{V3}, ===> \propto = \frac{1}{6}\pi$

Maka,

$$y = 2\cos(x - \tfrac{1}{6}\pi).$$

Maksimum $y = 2, unutk \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

$$x - \frac{1}{6}\pi = 0$$

$$x = \frac{1}{6}\pi$$

Minimum $y = \ -2, untuk \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \ -1$

$$x - \frac{1}{6}\pi = 0.$$

$$x = \tfrac{7}{6}\pi.$$

Contoh 3

Diketahui $y = 2\sin x^0 - 3\cos x^0 - 5, dan\ 0 < x < 360$

Ditanyakan :

a. harga ekstrimnya dan x yang bersangkutan.

b. ekstrim batas dan jenisnya.

Jawab : $y = 2\sin x^0 - 3\cos x^0 - 5$

Misalkan $2\sin x^0 - 3\cos x^0 = k\sin(x - \propto)^0.$

$= k \sin x^0 \cos \propto^0 - k \cos x^0 \sin \propto^0.$

$= k \cos \propto^0 \sin x^0 - k \sin \propto^0 \cos x^0.$

Maka,

$k \cos \propto^0 = 2$ $k^2(\cos^2 \propto^0 + \sin^2 \propto^0) =$

$2^2 + 3^2$

$k \sin \propto^0 = 3$

$k^2 = 13 \longrightarrow k = V13$

$tg \ \propto^0 = \frac{3}{2}$

$tg \ \propto^0 = 1{,}500$

$\propto = 56{,}3$

Maka,

$y = V13 \sin(x - 56{,}3) - 5$

a. Maksimum $y = V13 - 5, untuk \sin(x - 56{,}3)^0 = 1$

$x - 56{,}3^0 = 90$

$x = 146,3.$

Minimum $y = -V13 - 5, untuk \sin(x - 56{,}3)^0 = -1$

$x - 56{,}3 = 270$

$x = 326{,}3$

Ektrim batas kiri = $2 \sin 0^0 - 3 \cos 0^0 - 5 = -8, untuk \ x = 0$. Jenis ekstrim adalah minimum.

Ekstrim batas kanan = -8 untuk x = 360.

Jenis ekstrim adalah maksimum.

Contoh 4

Tentukan nilai maksimun dan minimun dari $3\sin 2x^0 + 4\cos 2x - 1$, dan *x* yang bersangkutan bila 0 < *x* < 360.

Jawab : misalkan $3\sin 2x^0 + 4\cos 2x^0 = k\sin(2x + \propto)^0$.

$$= k\,(\sin 2x^0 \cos \propto^0 + cos 2x^0 \sin \propto^0)$$

$$= k \cos \propto^0 \; sin 2x^0 + k \sin \propto^0 \cos 2x^0$$

Maka, $k\ cos\ \propto^0 = 3$ $\qquad k^2 = V(3^2 + 4^2) = 25$

$k \sin \propto^0 = 4$ $\qquad k = 5$

$tg\ \propto^0 = 1{,}333, ===> \propto = 53{,}1.$

Sehingga ,

$$3\sin 2x + 4\cos 2x^0 - 1 = 5\sin(2x + 53{,}1)^0 - 1.$$

Maksimum $= 4$, untuk $\sin\ (2x + 53{,}1)\,° = 1$

$$2x + 53{,}1 = 90 + n.360.$$

$$2x + 36{,}9 + n.360.$$

$$x = 18{,}45, + n.180, n = 0{,}1.$$

atau $x = 18{,}45, 198{,}45.$

Minimum $= 6$, untuk $\sin\ (2x + 53{,}1)\,° = -1$

$$2x + 53{,}1 = 270 + n.360.$$

$$2x + 216{,}9 + n.360.$$

$$x = 108{,}45, + n.180, n = 0{,}1.$$

atau $x = 108{,}45, 288{,}45$.

Contoh 5.

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = cos\, x° - sin\, x°, untuk\ 0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

Misalkan $\cos x° - \sin x° = k \cos\ (x+\propto)°$.

$$= k \cos x° \cos \propto° - k \sin x°\ sin \propto$$

$$= k \cos \propto° \cos x° - k \sin \propto° \sin x°$$

Maka,

$$k\ cos \propto° = 1$$

$$k\ sin \propto° = 1$$

$$k = V2$$

$$tg \propto° = 1, ===> \propto = 45$$

$$f(x) = V2 \cos(x + 45)°.$$

Maksimum $f(x) = V2$, untuk $\cos(x + 45)° = 1$

$$x + 45 = 0 + n.360.$$

$$x = -45 + n.360, n = 1$$

atau $x = 315$.

Minimum $f(x) = -V2$, untuk $\cos(x + 45)° = -1$

$$x + 45 = 180 + n.360, ===> x = 135, n = 0.$$

4). $a\ sin^2\ x + \sin x + c$

Bentuk ini dapat dicari ekstrimnya dengan cara sebagai berikut:

$$a\ sin^2\ x + \sin x + c = a(sin^2 x + {}^{b}/_{a}\ \sin x + b^2\ /4a^2) + c - b^2/4a.$$

$$= a(\sin x + b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Bentuk $a(\sin x +\ b/2a)^2\ + \frac{4ac-b^2}{4a} = a(\sin x + p)^2 + q$, dimana $p = \frac{b}{2a}, dan\ q = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Selanjutnya diselediki ekstrin dari bentuk $a(+\sin x\, p)^2 + q$, sebagai berikut:

3. $a > 0$: $p \geq 1$, maksimum mutlak $= a(1 + p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$.

Minimum mutlak $= a(-1 + p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

$0 \leq p \leq 1$, maksimum mutlak $= a(1 + p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$

Minimum mutlak q, untuk $\sin x = -p$

Minimum relatif $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

P = 0, maksimum mutlak = $a + q$, untuk $\sin x = 1\ atau\ \sin x = -1$

Minimum mutlak $= q$, untuk $\sin x =$

$-1 < p < 0$, maksimum mutlak $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

Minimum mutlak $= q$, untuk $\sin x = -p$.

Maksimum relatif $= a(1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = 1$

p ≤ -1 maksimum mutlak $= a(-1+p)^2 + q$, untuk $\sin x = -1$.

Minimum mutlak $= a(1+p)^2 + q$ untuk $\sin x = 1$.

4. $a < 0$, keadaan (1) maksimum diganti minimum dan minimum diganti maksimum,

Contoh 1.

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -4sin^2\, x^0 + 4\sin x^0 + 2$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

$$f(x) = -4sin^2\, x^0 + 4\sin x^0 + 2,$$
$$= -4(sin^2\, x^0 + \sin x^0 + 1/4) + 3,$$
$$= -4sin\ x^0 - 1/\,2^2 + 3,$$

Maksimum mutlak $f(x) = 3$, untuk $\sin x^0\ 1/2$

$$x = 30, 150$$

Minimum mutlak $= -6$, untuk $\sin x^0 + -1$,

$$x = 270.$$

Minimum relatif = 2 untuk $\sin x^0 + 1$,

$$x = 90.$$

Contoh 2.

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = sin^2 x + 4\sin x + 4$, untuk $0 \leq x < 2\pi$.

Jawab:

$$f(x) = sin^2 x + 4\sin x + 4$$
$$= (\sin x + 2)^2$$

Maksimum mutlak $f(x) = 9$, untuk $\sin x = 1$

$$x = 1/2\pi$$

Minimum mutlak $f(x) = 1$ untuk $\sin x = 1$

$$x = 3/2\pi.$$

5. $a\ cos^2 x + b \cos x + c$

Cara mencari penyelesaian dari ekstrim fungsi kuadrat dalam $cos^2 x + b \cos x + c$ ini, sama dengan bentuk (4) di atas yaitu :

$$f(x) = a\ cos^2 x + b \cos x + c$$

$$= a\ (\cos x + b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Contoh 1.

Tentukan ekstrim dari harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\ cos^2 x^0 + 3$,.untuk $0 \leq x \leq 360$.

Jawab:

$f(x) = 2\ cos^2 x^0 + 3$,.

$= 2\left(cos^2 x^0 + cos\ x^0 + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}.$

= $2(cosx^0 + \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2}.$

Maksimum mutlak $f(x) =$? Untuk $cos\ x^0 = 1, === x = 0, 360$

Minimum relatif $f(x) = 3$ Untuk $cos\ x^0 = -1, === x = 180$

Minimum mutlak $f(x) = 5/2$, Untuk $cos\ x^0 = -1/2, == x = 120{,}240$.

6. $a\ tg^2 x + b\ tg\ x + c$

Karena $tg\ x$ dapat mencapai positif tak hingga dan negatif tak hingga $(\pm \sim)$, maka fungsi ini sifat ekstrimnya tidak terikat pada harga $tg\ x$, tetapi sifat ekstrimnya dapat dipikirkan seperti ekstrim pada fungsi aljabar $ax^2 + bx + c$.

$$a\ tg^2 x + b\ tg\ x + c = a(tg\ x + b/2a)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$a > 0$: Minimum mutlak $= \frac{4ac-b^2}{4a}$, untuk $tg\ x = -h/2a$

Tidak mempunyai maksimum (karena mencapai $(+ \sim)$,

$a < 0$: Minimum mutlak $= \frac{4ac-b^2}{4a}$, untuk $tg\ x = -h/2a$

Tidak mempunyai maksimum (karena mencapai $(-\sim)$.

Contoh 1.

Tentukan eksrin dan harga x yang bersangkan dari fungsi $f(x) = -2\ tg^2 + 3\ tg\ x^0 - 1$, untuk $0 \leq x < 180$.

Jawab:

$a = -2 < 0$, maka maksimum mutlak $f(x) = \frac{4(-2)(-1)-(3)^2}{4(-2)}$

$$= 1/8,$$

Untuk $tg\ x^0 = \frac{-3}{2(-2)} = 0{,}750 ===> x = 36{,}9.$

Contoh 2.

Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 3\ tg^2 x^0 - 2\ tg\ x^0 + 4$, untuk $0 \leq x < 180$.

Jawab:

$a = 2 > 0$, maka minimum $f(x) = \frac{4(3)(4)-(2)^2}{4(3)} = 3\frac{2}{3}$

Untuk $tg\ x^0 = \frac{-2}{2(3)} = 40,333$

$x = 20,4.$

B. Ekstrim dengan Syarat

Yang dimaksud dengan syarat disini adalah hubungan yang harus dipenuhi antara sudut-sudut yang dibicarakan. Jika yang dibicarakan sudut-sudut segitiga (, ,) maka banyak memberi pertolongan dalam perhitungan bahwa dua sudut diantaranya berlaku :

$$\boxed{0 \leq \text{ł} \propto -I^3 \text{ł} < \propto +\beta}$$

Contoh 1.

Pada segitiga ABC diketahui $3\ sin \propto \sin\beta = 1$. Tentukan γ maksimum.

Jawab :

$$\propto +\beta + \sigma = 180°, ===> \propto + \delta = 180° - \delta.$$

$$3 \sin \propto \sin\beta = 1$$

$$3/2\ (2 \sin \propto \sin\beta) = 1$$

$$2 \sin \propto \sin\beta = 2/3$$

$$\cos(\propto -\beta) - \cos(\propto +\beta) = 2/3$$

$$\cos(\propto -\beta) - \cos(180° - \delta) = 2/3$$

$$\cos(\propto -\beta + \cos\delta = 2/3$$

$$\cos\delta = \frac{2}{3} - \cos(\propto -\beta)$$

δ maksimum, jika $\cos\delta$ minimum, berarti $\cos(\propto -\beta)$ harus maksimum. Dan maksimum $\cos(\propto -\beta) = 1$. Maka, $\cos\delta = \frac{2}{3} - 1 = -0{,}333$

$$\delta = 109{,}47°.$$

<u>Contoh 2.</u>

Pada soal tiga ABC berlaku $cos \propto, cos\beta = 1$, tentukanlah :

a. Batas-batas δ

b. δ minimum

Jawab :

$\cos \propto + \cos\beta = 1$

$2\cos\frac{1}{2}(\propto +\beta) = 1$

$2\ sin\frac{1}{2}(\propto -\beta) = 1$

$cos\frac{1}{2}(\propto -\beta = \frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}}$

$0° < \frac{1}{2} I \propto -\beta\ I < \frac{1}{2}(\propto +\beta)$

$\cos 0° > cos\frac{1}{2}(\propto -\beta) > cos\frac{1}{2}(\propto +\beta)$. Selang $0° \leq x^0 \leq 180°$ sudut makin besar $cos\ x^0$ makin kecil.

$1 > cos\frac{1}{2}(\propto -\beta) > sin\frac{1}{2}\delta$

$1 > \frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}}$

1). $\frac{1}{2\sin 1/2\delta} < 1$

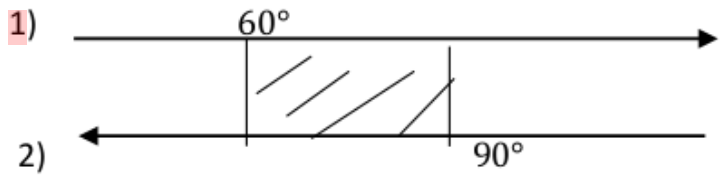
$sin\frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}$

Batas : $sin\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2} ==> \delta = 60°$

2). $\frac{1}{2sin\frac{1}{2\delta}} > sin\frac{1}{2}\delta$

$sin^2\frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}$

Batas : $\delta = 90°$.



a. batas-batas yang memenuhi : $60° \leq \delta \leq 90°$.

b. jadi δ minimum = 60°

<u>Contoh 3.</u>

Tentukan maksimum $(\sin x° + \sin y°)$, serta harga-harga x dan y bila $x° + y° = 60°, x > 0\ dan\ y > 0$.

Jawab:

$$\sin x° + \sin y° = 2\sin\frac{1}{2}(x° + y°)\cos\frac{1}{2}(x° - y°)$$

$$= 2\sin 30°\cos\frac{1}{2}(x° - y°)$$

$$= \cos\frac{1}{2}(x° - y°$$

Maksimum $(\sin x° + \sin y°) = 1$, untuk $\cos\frac{1}{2}(x° - y°) = 1$

$$\frac{1}{2}(x° - y°) = 0°$$

$$x° - y° = 0°$$

$$x + y = 60$$

$$\underline{x - y = 0}$$

$$2x = 60, ==> x = 30$$

$$y = 30.$$

LATIHAN SOAL

1). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -2\sin x° + 4$ untuk $0 \leq x \leq 360$.

2). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\sin 3x - 4$, untuk $0 \leq x \leq \pi$.

3). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = sin^2 x^{\circ} + 3\sin 2x° - 2$ untuk $0 \leq x \leq 360$.

4). Jika $y = sin^2 x - 2\sin x + 2$, Tentukan y ekstrim dan harga x yang bersangkutan pada saat ekstrin tersebut bila $-\pi \leq x \leq \pi$.

5). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 4sin^2 x^{\circ} - 4\sin x° - 6$ untuk $0 \leq x \leq 360$.

6). Tentukan maksimum dan minimum, serta harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 3\cos 2x° - 5$ untuk $0 \leq x \leq 360$

7). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2cos^2 x - 2\cos x + 1$untuk $-\pi \leq x \leq \pi$.

8). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $y = -2cos^2 x - 2\cos x° + 2\cos x° - 1/2$ untuk $0 \leq x \leq 360$.

9). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $y = 6\,cos^2 x° + 4\cos x° - 5$untuk $0 \leq x \leq 360$.

10). Pada segitiga ABC, $c = 50°$, jari − jari lingkaran luarnya 5 cm. Bila c bergerak pada busur AB, carilah harga maksimum keliling segitiga tersebut.

11). Jika $x° + y° = 60$ tentukan x dan supaya $sin^2 x° + sin^2 y°$ mencapai ekstrim. Tentukan pula ekstrim tersebut.

12). Pada segitiga ABC, b + c = 2a. tentukanlah ∝ maksimum.

13). Pada segitiga ABC, $\cos\frac{1}{2} \propto = 4 \sin\frac{1}{2\beta} \sin\frac{1}{2\delta}$

a. tentukanlah batas-batas $\propto$

b. tentukanlah $\propto$ maksimum

14). Pada segitiga ABC, $tg \propto + tg\beta = 1$.

a. tentukanlah batas-batas δ

b. tentukanlah δ maksimum

15).). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = 2\ tg^2x - 3\tan x\ ° + 1$untuk $0 \leq x \leq 180$.

16). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = -3\ tg^2x° + 2\tan x\ ° + 4$ untuk $0 \leq x \leq 180$.

17). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $f(x) = \frac{2}{tg^2x° - 3tg\ x° + 2}$ untuk $0 \leq x \leq 180$.

18). Tentukan ekstrim dan harga x yang bersangkutan dari fungsi $\sin x° \sin bila\ x° - 90°, 0 < x < 180, 0 < y < 180$.

19). Pada segitiga ABC, garis tinggi dari titik A = jari-jari lingkaran luarnya. Tentukan $\propto$ maksimum.

20). Pada segitiga ABC, A = 50°, jari-jari lingkaran luarnya 5cm. tentukan luas maksimum segitiga itu.

BAB VII
GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Pengertian ekstrim fungsi trigonometri sangat membantu dalam menggambar grafik fungsi trigonometri.

Untuk menggambarkan grafik fungsi trigonometri diperlukan :

a. Koordinat titik potong dengan sumbu x dan sumbu y,

b. Koordinat titik puncak,

c. Koordinat titik batas,

d. Asintut dan

e. Tanda-tanda fungsi.

Data-data di atas diperlukan sesuai dengan fungsinya, mungkin saja dengan beberaa langkah grafik sudah dapat gambarkan.

<u>Contoh 1.</u>

Grafik fungsi $y = \cos x°$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

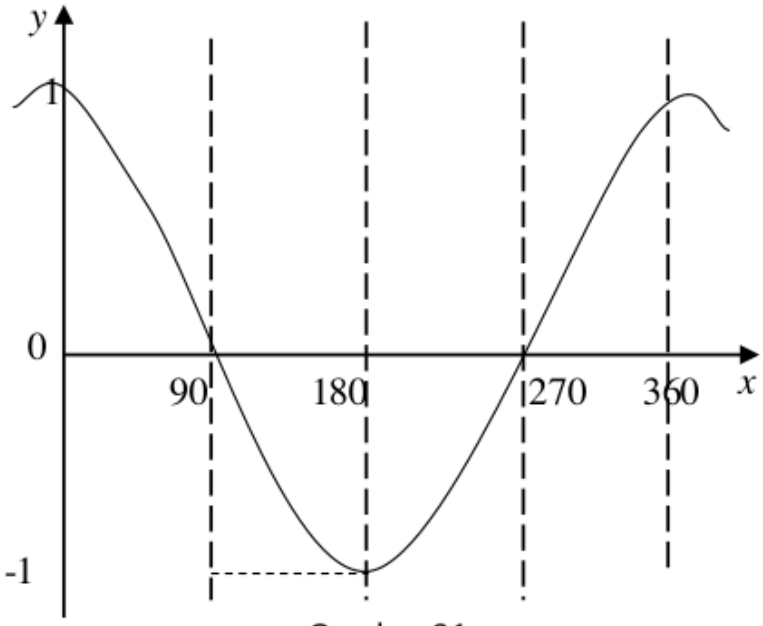
1). Titik potong grafik dengan sumbu x, jika y = 0. $\cos x° = 0$, $===> x = 90{,}270$.

2). Titik potong grafik dengan sumbu y, jika x = 0. $y = \cos 0° = 1$.

3). Titik puncak

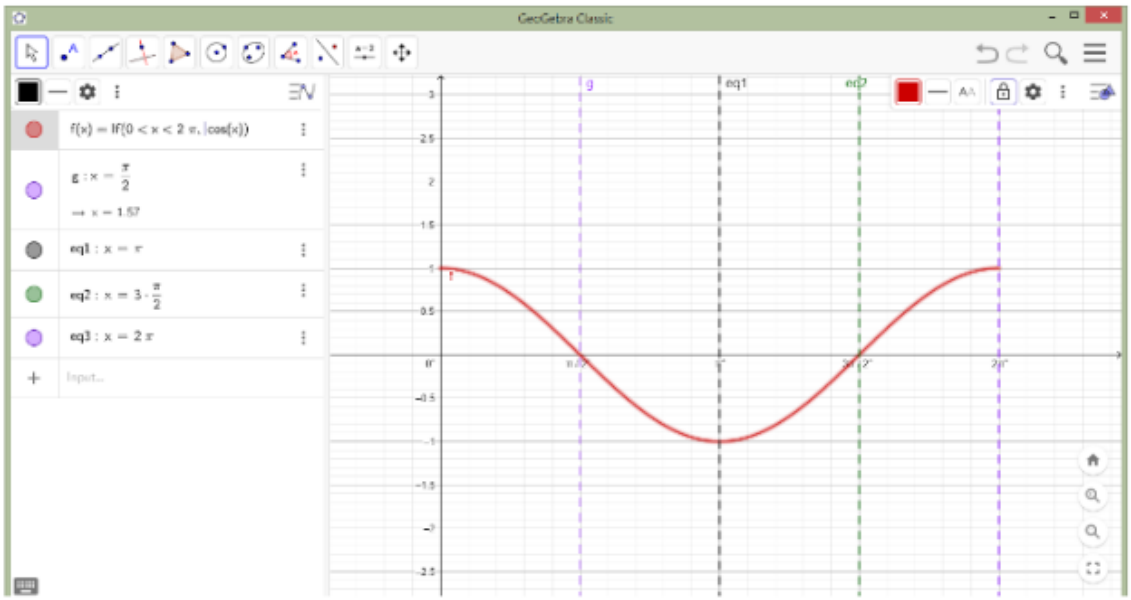
Maksimum y =1, untuk $\cos x° = 1, ===> x = 0{,}360$.

Minimum y = -1 untuk $\cos x° = -1 ===> x = 180$.



Gambar 31

Dengan menggunakan bantuan aplikasi GeoGebra Classic, maka Grafik fungsi $y = \cos x°$, untuk $0 \leq x \leq 360$ dapat dilukis sebagai berikut dengan INPUT: f(x)=If(0<x<360, cos(x))



Gambar 32

<u>Contoh 2.</u>

Grafik fungsi $y = \sin x°, untuk\ 0 \leq x \leq 360.$

1). Titik potong rafik dengan sumbu x jika $y = 0. \sin x° = 0, ===> x = 0, 180, 360.$

2). Titik potong rafik dengan sumbu y jika $x = 0. y = \sin 0° = 0$

3). Titik puncak.

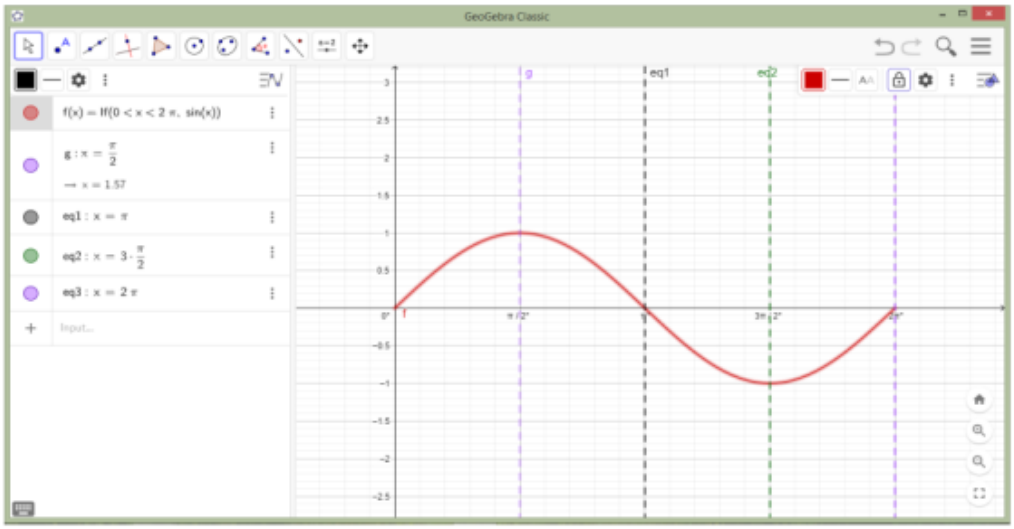
Maksimum y = 1, untuk $\sin x° = 1.$

$$x = 90$$

Minimum y = -1, untuk $\sin x° = -1.$

$$x = 270.$$

Dengan menggunakan bantuan aplikasi GeoGebra Classic, maka Grafik fungsi $y = \cos x°$, untuk $0 \leq x \leq 360$ dapat dilukis sebagai berikut dengan INPUT: f(x)=If(0<x<360, sin(x))



Gambar 33

<u>Contoh 3.</u>

Grafik fungsi $y = tg\ x°$, untuk $0 \leq x \leq 360.$

1). Titik potong grafik dengan sumbu x, jika $y = 0.$

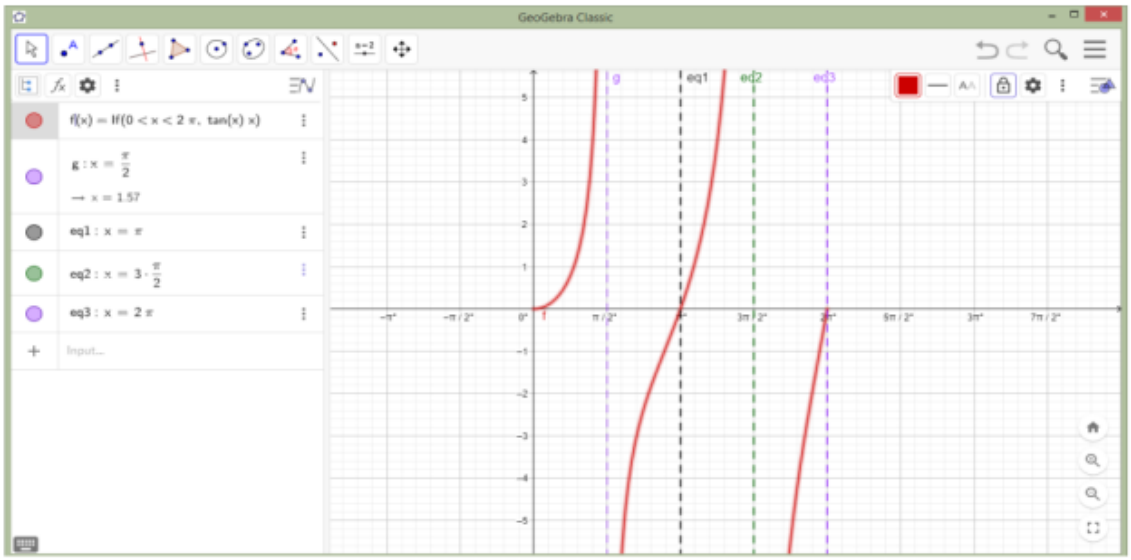
$tg\ x° = 0, === x = 0, 180, 360.$

2). Titik potong grafik dengan sumbu y, jika $x = 0$.

$y = tg\ 0° = 0.$

3). Titik puncak.

Mendekati tak terdefinisikan besarnya, untuk $x = 90, 270$. Demikian pula tak terdefinisikan kecilnya, didekati dari kanan ke kiri, untuk $x = 90, 270$.



Gambar 34

<u>Contoh 4.</u>

Grafik fungsi $y = \cos 2\ x°$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

1). Titik potong grafik dengan sumbu x jika $y = 0$.

$$\cos 2\ x° = 0, ===> 2x = 90 + \pi.360\ atau\ 270 + \pi.360$$

$$x = 45 + \pi.180\ atau\ 135 + \pi.180.$$

Untuk $\pi = 0,1, ===> x = 45, 135, 225, 315.$

2). Titik potong grafik dengan sumbu y, jika $x = 0$.

$$y = \cos 2(0)° = \cos 0° = 1.$$

3). Titik puncak.

Maksimum y = 1, untuk $\cos 2x° = 1, === 2x = 0 + \pi.360$

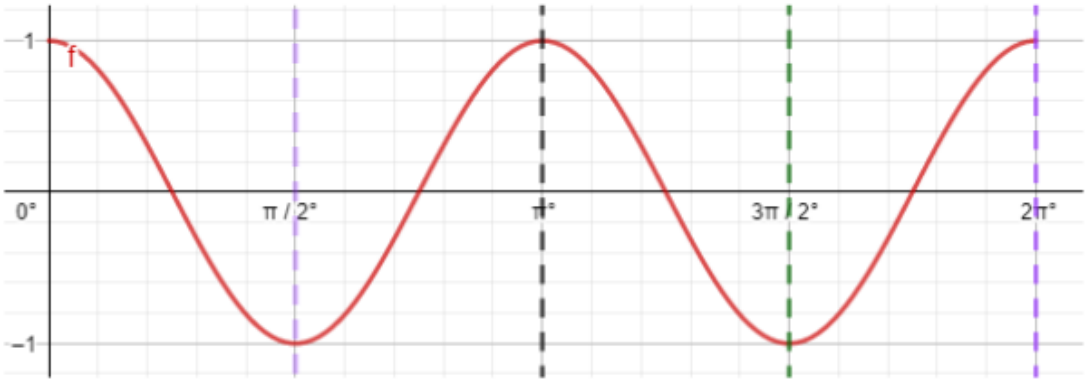
$$x = \pi.180.$$

Untuk $\pi = 0,1,2, ===> x = 0,180, 360.$

Minimum y = $-1, untuk \cos 2x° = -1, === 2x = 180 + \pi.360$

$$x = 90 + \pi.180$$

Untuk $\pi = 0,1, === x = 90, 270.$



Gambar 35

Dari contoh 1 dan contoh 4 di atas, dapat disimpulkan :

$0 \leq x \leq 360 \quad y = \cos x° ===> 1\ gelombang\ penuh.$

$$y = \cos 2x° ===>$$

$2\ gelombang\ penuh.\ dan\ seterusnya.$

$y = \cos k\ x°\ 1\ ===> k\ gelombang\ penuh$

<u>Contoh 5.</u>

Grafik fungsi $y = \sqrt{3} \cos x° + \sin x°, untuk\ 0 \leq x \leq 360.$

Misalkan $\sqrt{3} \cos x° + \sin x° = k \cos(x - \propto)°, k > 0$

$$a = \sqrt{3}, b = 1$$

$$k = V((\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 2.$$

$tg \propto° = \frac{1}{\sqrt{3}}, ===> \propto = 30.$

Maka, $f(x) = 2\cos(x - 30)\,°$.

1). Titik potong grafik dengan sumbu x, jika y = 0

$$2\cos(x - 30°) = 0, ===> x - 30 = 90, 270$$

$$x = 120, 300.$$

2). Titik potong dengan sumbu y, jika x = 0.

$$y = 2\cos(x - 30)° = 2\cos 30° = 2\cos 30° = 2\left(\frac{v3}{2}\right) = v3.$$

3). Titik puncak.

Maksimum y = 2, untuk $\cos(x - 30)\,° = 1$

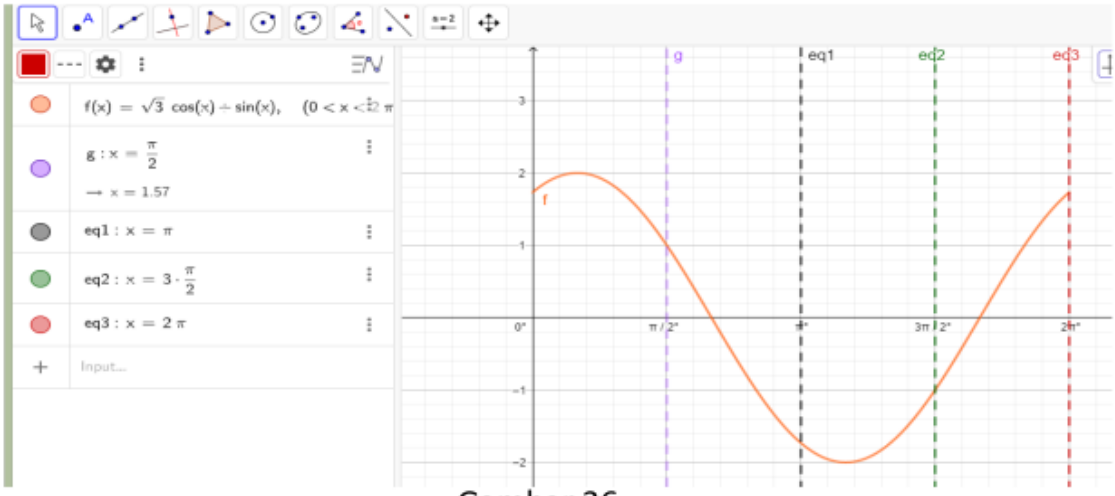
$$x - 30 = 0$$

$$x = 30$$

Minimum y = -2, untuk $\cos(x - 30)\,° = -1$

$$x - 30 = 180$$

$$x = 210.$$



Gambar 36

Contoh 6.

Grafik fungsi $y = 4\,cos^2\,x° - 4\cos x° - 3, 0 \leq x \leq 360.$

$y = 4cos^2x° - 4\cos x° - 3$

$y = 4(\cos x° - 1/2)^2 - 4.$

1). Titik potong grafik dengan sumbu x, jika y = 0.

$4(\cos x° - \frac{1}{2)^2} - 4 = 0$

$\cos x° - \frac{1}{2)^2} - 1 = 0$

$\cos x° - \frac{1}{2)^2} + 1)(\cos x° - 1/2) - 1) = 0$

$\cos x° - \frac{1}{2)^2} + 1 = 0\ atau\ \cos x° - 1/2 - 1 = 0$

$\cos x° = -\frac{1}{2)^2}\ atau \cos x° = 3/2$

$x = 120, 240$

$x = \emptyset.$

2). Titik potong grafik dengan sumbu y, jika x = 0

$y = 4(\cos x° - \frac{1}{2)^2} - 4.$

$4(\cos 0° - \frac{1}{2)^2} - 4.$

$4\ (1 - \frac{1}{2)^2} - 4.$

= -3.

3). Titik puncak.

Maksimum y = 5, untuk $\cos x = -1, ===> x = 180.$

Minimum mutlak = -4 untuk $\cos x° = \frac{1}{2}$

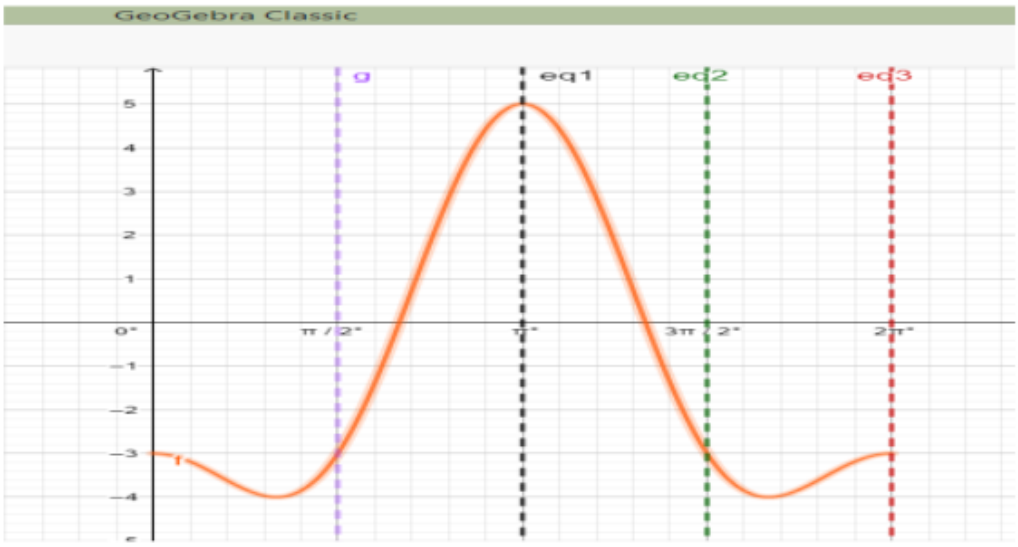
$$x = 60, 300$$

Maksimum relatif y = -3, untuk $\cos x° = 1$

$$x = 360.$$

Apabila menggunakan aplikasi GeoGebra, maka gambar grafik yang diperoleh dengan INPUT:

1. f(x)=If(0<x<2 π, 4 cos^(2)(x)-4 cos(x)-3)
2. g: x=((π)/(2))
3. eq1: x=π
4. eq2: x=3 ((π)/(2))
5. eq3: x=2 π



Gambar 37

Contoh 7.

Grafik fungsi $y = \tan^2 x^0 - \tan x^0 - 2$, untuk

$0 \leq x \leq 180$.

1). Titik potong grafik dengan sumbu x, jika y = 0.

Maka,

$$\tan^2 x^0 - \tan x^0 - 2 = 0$$

$$(\tan x^0 + 1)(\tan x^0 - 2) = 0$$

$$\tan x^0 + 1 = 0 \text{ atau } \tan x^0 - 2 = 0$$

Dari,

$$\tan x^0 = 2$$

$x = 63{,}4$

2). Titik potong grafik dengan sumbu y, jika x = 0

Maka,

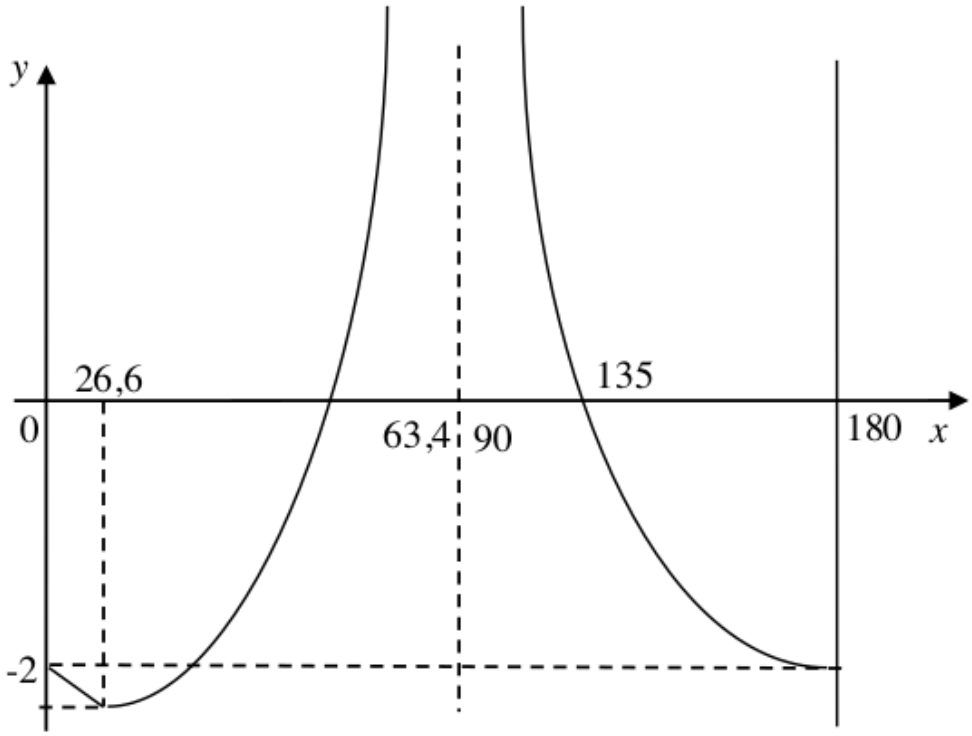
$$y = \tan^2 0^0 - \tan 0^0 - 2 = -2$$

3). Titik puncak.

$$y = \tan^2 x^0 - \tan x^0 - 2$$

$$= (\tan x^0 - ½)^2 - 2\ ¼$$

Minimum y = -2 ¼ , untuk $\tan x^0 = ½$, ==> x = 26,6

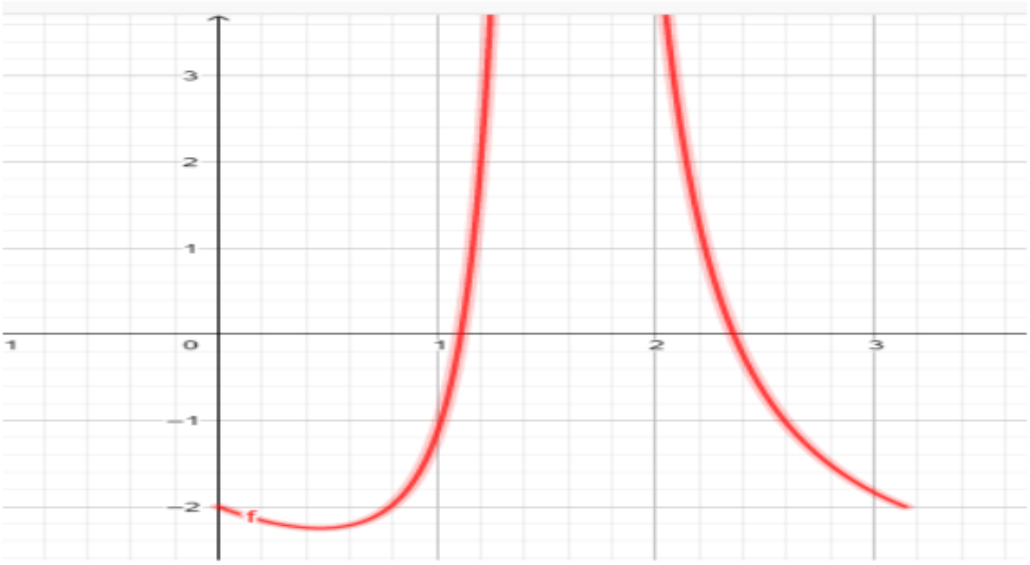


Gambar 38

dengan menggunakan aplikasi GeoGebra maka Grafik fungsi:

$\boldsymbol{y = tg^2x^\circ - tgx^\circ - 2,}$ untuk $0 \leq x \leq 180$ diperoleh sebagai berikut:

- INPUT: f(x)=If(0<x<π, tan^(2)(x)-tan(x)-2)



Gambar 39

LATIHAN SOAL

1. Gambarlah grafik fungsi-fungsi berikut, untuk $0 \leq x \leq 360$.

   a. $f(x) = \frac{1}{2} \cos x^0$
   b. $f(x) = \cos \frac{1}{2} x^0$
   c. $f(x) = -3 \cos 2x^0$
   d. $f(x) = \cos (x + 90)^0$
   e. $f(x) = 3 \cos (x + 90)^0$
   f. $f(x) = -2 \sin x^0$
   g. $f(x) = \sin 4x^0$
   h. $f(x) = \sin (x - 90)^0$
   i. $f(x) = 2 \sin (x - 90)^0$
   j. $f(x) = \tan 1/3\, x^0$

2. Gambarlah grafik fungsi $y = 1 + \cos x^0$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
3. Gambarlah grafik fungsi $y = 2 - \sin x^0$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
4. Gambarlah grafik fungsi $y = \sin x - \cos x$, untuk $-\pi \leq x \leq 2$.
5. Gambarlah grafik fungsi $y = 2 \cos x + \frac{1}{2} \sin x$, untuk $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
6. Gambarlah grafik fungsi $y = 3 \cos 2x^0 - 6 \sin x^0 - 1/3$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
7. Gambarlah grafik fungsi $y = \cos 2x^0 - 2 \cos x^0$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
8. Gambarlah grafik fungsi $y = \cos x^0 - 1$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
9. Gambarlah grafik fungsi $y = \frac{4 \cos x^0 + 7}{2 \cos x^0 + 3}$, untuk $0 \leq x \leq 360$.
10. Gambarlah grafik fungsi $y = \frac{6 \sin x^0 + 1}{2 \sin x^0 - 3}$, untuk $0 \leq x \leq 360$.

11. Gambarlah grafik fungsi $y = \tan x + \text{cotan}\, x$, untuk $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0, \pm \frac{1}{2}\pi$.

12. Gambarlah grafik fungsi $y = \tan x - \text{cotan}\, x$, untuk $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0, \pm \frac{1}{2}\pi$.

13. Gambarlah grafik fungsi $y = \frac{1}{2} \sin x + 2 \cos x$, $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

14. Gambarlah grafik fungsi $y = 1 + 2 \sin x$, $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

15. Gambarlah grafik fungsi $y = 1 - 3 \cos x$, $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

BAB VIII
FUNGSI SIKLOMETRI

A. Pengertian Fungsi Siklometri

Telah dibicarakan bahwa sudut x yang nilai sinusnya sama dengan ½ adalah $\frac{\pi}{6}$. Pernyataan ini dapat ditulis secara matematika $\frac{\pi}{6}$ = arc sin ½. Secara umum x = arc sin y, yang benar x adalah suatu sudut yang nilai sinusnya sama dengan y. Dengan demikian x = arc sin y dan y = sin x adalah sinonim.

Defisini :

Jika f = { (x,y)/ y = sin x}, maka g = { (y,x)/ x = arc sin }

Dan g yang merupakan relasi siklometri disebut invers dari f, yang biasa dtulis f^{-1}. (g = f^{-1} dan g^{-1} = f).

Selanjutya, relasi siklometri x = arc sin ½ dapat dilihat berikut ini :

x = arc sin ½ , ===> sin x = ½

x = 1/6 π + n. 2 π atau

x = 5/6 π + n. 2 π, n ∈ B.

Ternyata x = arc sin ½ suatu relasi yang bukan fungsi, karena terdapat banyak nilai x yang memenuhi.

yialah :

$0 \leq y \leq 1$, ===> $0 \leq$ arc sin y $\leq$ ½ π

$-1 \leq y \leq 0$, ===> - ½ $\pi \leq$ arc sin y ≤ 0

atau

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leq \text{arc sin } y \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

Untuk membedakan relasi dengan fungsi biasanya ditulis :

Relasi	Fungsi
arc sin y = $\sin^{-1}$y	arc sin y = $\sin^{-1}$ y
arc cos y = $\cos^{-1}$y	arc cos y = $\cos^{-1}$ y
arc tan y = $\tan^{-1}$y	arc tan y = $\tan^{-1}$ y
arc sec y = $\sec^{-1}$y	arc sec y = $\sec^{-1}$ y
arc cosec y = cosec^{-1}y	arc cosec y = cosec^{-1} y
arc cotan y = cotan^{-1}y	arc cotan y = cotan^{-1} y

Dalam tabel berikut dapat dilihat daerah awal (domain) dan daerah hasil (range) fungsi-fungsi siklometri.

Tabel 2 Daerah awal (domain) dan daerah hasil (range) fungsi-fungsi siklometri

f. trigonometri	f. siklometri	domain	range
{ (x,y)/ y = sin x }	{ (y,x)/ x = arc sin x }	{ y/ - 1 ≤ y ≤ 1}	{ x/- $\frac{\pi}{2}$ ≤ x ≤ $\frac{\pi}{2}$ }
{ (x,y)/ y = cos x }	{ (y,x)/ x = arc cos x }	{ y/ - 1 ≤ y ≤ 1}	{ x/0 ≤ x ≤ π.}

{ (x,y)/ y = tan x }	{ (y,x)/ x = arc tan x }	{ y/ - 4 ≤ y ≤ 4}	{ x/- $\frac{\pi}{2}$ < x < $\frac{\pi}{2}$ }
{ (x,y)/ y = cotan x }	{ (y,x)/ x = arc cotan x }	{ y/ - 4 ≤ y ≤ 4}	{ x/0 < x < π }
{ (x,y)/ y = sec x }	{ (y,x)/ x = arc sec x }	{ y/ y ≤ - 1} { y/ y ≥ 1}	{ x/0 ≤ x < $\frac{\pi}{2}$ } { x/$\frac{\pi}{2}$ < x ≤ π }
{ (x,y)/ y = cosec x }	{ (y,x)/ x = arc cosec x }	{ y/ y ≤ 1 } { y/ y ≥ 1}	{ x/- $\frac{\pi}{2}$ ≤ x < 0 } { x/0 < x ≤ $\frac{\pi}{2}$ }

Contoh 1.

x = arc sin 1/2 , ===> sin x = ½

x = 1/6 π + n. 2 π atau

x = 5/6 π + n. 2 π, n ∈ B.

x = arc sin 1/2 , ===> sin x = 1/6 π, 1/6 π disebut harga utama.

Contoh 2.

x = arc cos (-1/2), ===> x = 2/3 π + n. 2 π atau

x = 5/3 π + n. 2 π, n ∈ B.

x = arc cos (-1/2), ===> x = 2/3 π

Contoh 3.

x = arc tan (-1), ===> x = 3/4 π + n. π, n ∈ B.

x = arc tan (-1), ===> x = -1/4 π

Contoh 4.

x = arc cotan $(-\sqrt{3})$, ===> x = 5/6 π + n. 2 π atau

x = 7/6 π + n. 2 π, n ∈ B.

x = arc cos $(-\sqrt{3})$, ===> x = 5/6 π

Contoh 5

Tentukan semua fungsi trigonometri dari sudut yang dinyatakan oleh

$arc\ sin\sqrt{\frac{3}{2}}$

Jawab :

Misalkan x = arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$, maka sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Jadi, sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cosec x = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

cos x = $\frac{1}{2}$ sec x = 2

tan x = $\sqrt{3}$ cotan = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. Grafik Fungsi Siklometri

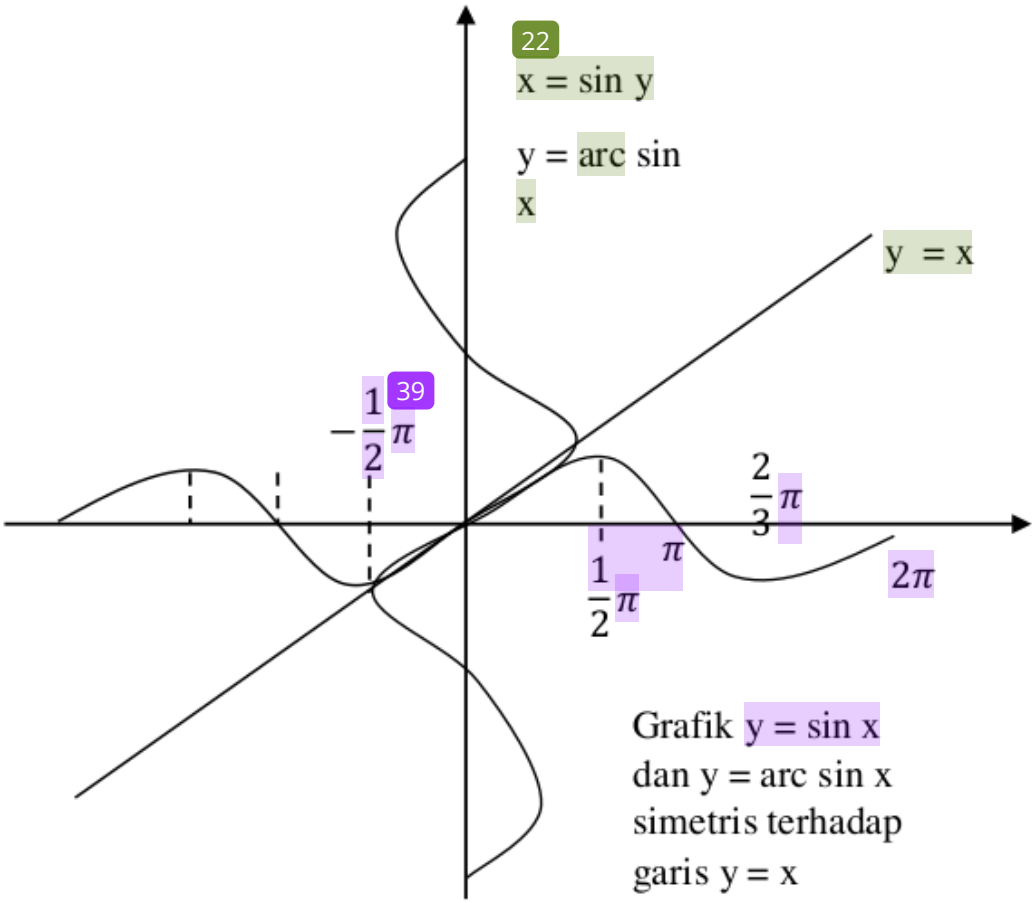
Hubungan antara fungsi trigonometri dengan fungsi siklometri dapat dilihat pada grafiknya.

Contoh 1

Grafik y -= sin x dan x = arc sin y adalah simetri terhadap garis y = x. Grafik f = { (y,x)/x = arc sin y } untuk f = { (x/$-2\pi \leq x \leq 2\pi$}

diperoleh dengan refleksi grafik y = sin x terhadap garis y = x.

Perhatikan bahwa x = arc sin y bukan fungsi, sebab untuk setiap y didalam interval - $1 \leq y \leq 1$, terdapat banyak harga x yang memenuhi, supaya menjadi fungsi maka f = { x/- $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ }, seperti terlihat pada grafik berikut ini. (yang bergaris tebal).



Gambar 40

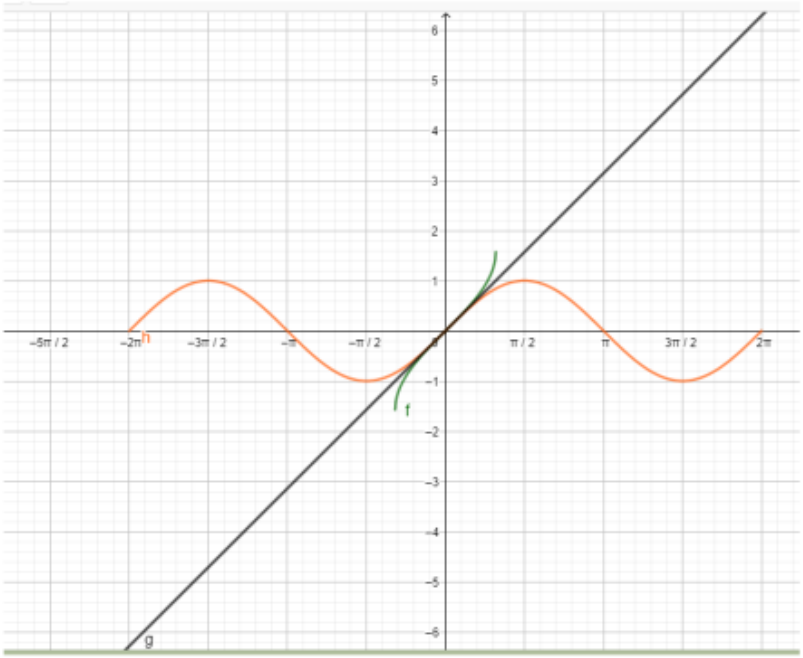
Adapun grafik $y = sinx, y\ arc\ \sin x,$ dan $y = x$ melalui aplikasi GeoGebra dengan

INPUT:

- y=If(-2 π<x<2 π, sin^(-1)(x))

- g: y=x

- h: y=If(-2 π<x<2 π, sin(x))



Gambar 41

C. Identitas Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri x = arc sin y dapat pula ditulis dengan bentuk y = arc sin x, dimana y adalah besaran sudut dan x adalah nilai sinus untuk sudut y.

Identitas – identitas fungsi siklometri adalah seperti berikut ini.

1) Arc sin (sin x) = x, untuk | x | ≤ 1.
2) Arc cos (cos x) = x, untuk | x | ≤ 1.
3) Arc tan (tan x) = x
4) Arc cotan (cotan x) = x
5) Arc sec (sec x) = x, untuk | x | ≤ 1.
6) Arc cosec (cosec x) = x, untuk | x | ≤ 1.
7) Arc sin x ± arc sin y = arc sin (xv(1-y^2) ± yv(1-x^2)), untuk

$| x | \leq \frac{v2}{2}$, $| y | \leq \frac{v2}{2}$

8) . Arc cos x $\pm$ arc cos y = arc cos (xy - v(1- x^2) (1-y^2)),

untuk

$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$

9) . Arc tan x $\pm$ arc tan y = Arc tan $\frac{x \pm y}{1 \pm xy}$, untuk | x | < 1,

| y | < 1

Sekarang kita buktikan identitas 1) Sebagai berikut :

Jika y = sin x, maka arc sin y = arc sin 9 sin x),

Dan jika y = sin x, maka arc sin y = x.

Sehingga,

x = Arc sin (sin x), atau arc sin (sin x) = x.

Dengan cara yang sama, identitas 2), 3), 4), 5), dan 6), dapat dibuktikan. Buktikan sendiri.

Selanjutnya kita buktikan identitas 7), kita buktikan seperti berikut ini.

Misalkan θ = arc sin x, dan Ø = arc sin y, maka sin θ = x dan sin Ø = y.

Dengan rumus $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, maka cos θ = v(1 – x^2), dan cos Ø = v(1 – y^2). Diambil nilai positif karena range dari fungsi arc sinus adalah - $\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$, dan range untuk fungsi arc cosinus tidak pernah negative.

Dari rumus sin (θ $\pm$ Ø) = sin θ cos Ø $\pm$ cos θ sin Ø, maka

$$\text{Sin}\ (\theta \pm \emptyset) = x\ V\ (1 - y^2) \pm y\ V\ (1 - x^2).$$

Untuk $-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$, dan $-\frac{1}{4}\pi \leq \emptyset \leq \frac{1}{4}\pi$, atau $-1/2\,\pi \leq \theta \pm \leq 1/2\,\pi$, maka

$\theta \pm \emptyset = \text{arc sin}\ (x\ V\ (1 - y^2) \pm y\ V\ (1 - x^2))$.

Jadi,

$$\text{Arc sin}\ x \pm \sin y = \text{Arc sin}\ (x\ V\ (1 - y^2) \pm y\ V\ (1 - x^2)).$$

Identitas 8), dan 9), dapat dibuktikan dengan cara seperti ini.

Buktikan sendiri.

<u>Contoh 1.</u>

Tentukanlah nilai dari : a. cot (Arc sin $\frac{v3}{2}$)

b. Arc sin (sin $\frac{\pi}{6}$)

Jawab :

a. cot (Arc sin $\frac{v3}{2}$)

Arc sin $\frac{v3}{2} = \frac{\pi}{3}$

Cot (Arc sin $\frac{v3}{2}$) = cot $\frac{\pi}{3} = \frac{v3}{3}$

b. Arc sin (sin $\frac{\pi}{6}$).

Sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Arc sin (sin $\frac{\pi}{6}$) = Arc sin $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$

tan y = x

y = Arc tan x, sebab sudut untuk Arc tan (2x/ (1-x^2)) dan Arc sin (x/v (1-x^2)) terletak dikuadran yang sama pada | x | < 1, sehingga -$\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Jadi y = Arc tan x, terbukti.

LATIHAN SOAL

1. Tentukanlah semua nilai funngsi-fungsi trigonometri untuk sudut yang dinyatakan oleh fungsi-fungsi siklometri dibawah ini.

   a. Arc sin $\frac{v3}{2}$ b. Arc cos $\frac{v2}{2}$ c. Arc tan $\frac{v3}{2}$

   d. Arc sin (- $\frac{v3}{2}$) e. Arc cos (- $\frac{v3}{2}$) f. Arc tan 1

   g. Arc cotan -1 h. Arc sec v3 i. Arc cosec x,

   x > 0, x < 0

   j. 2 Arc sin ½ k. 2 Arc cos $\frac{v3}{2}$

2. Gabarlah grafik fungsi-fungsi siklometri berikut ini.

   a. y = arc ¼ x b. y = arc sin 2x c. y = arc sin ½ x

   d. y = 2 arc sin x e. y = 3 arc sin 1/3 x f. y = arc cos x

   g. y = arc cos 1/3 x h. y = 3 arc cos 2x i. y = arc cos 2x

   j. y =Arc tan x k. y = Arc tan 2x l. y = Arc tan ½ x

   m. y = Arc cot x n. y = Arc sec x o. y = Arc cosec x

3. Hitunglah.

a. Arc sin ½ $\sqrt{2}$

b. Arc sin ½ v3

c. Arc sin (-1)

d. Cos (Arc sin ½)

e. Tan (Arc sin (-½))

f. Arc cos ½

g. Arc sin (sin 2/3 π)

h. Arc cos (sin 1/6 π)

i. Arc tan (tan (- 2/3 π)

j. Arc sin (cos (- 1/4 π)

k. Arc sin (-½) + arc cos ½

l. Arc sin ½ $\sqrt{3}$+ arc cos (-½)

m. Arc sin ½ $\sqrt{2}$ - Arc cos ½ $\sqrt{3}$

4. Buktikanlah.

a. Arc sin x + Arc sin (-x) = 0

b. Arc cos x + Arc cos (-x) = π

c. Arc sec x + Arc cos (-x) = π

d. Arc sin x + Arc cos x = ½ π

e. Arc cosec x + Arc sec x = ½ π

f. Arc tan x + Arc cotan x = ½ π

g. Arc sin 1/x + Arc cos 1/x = Arc sin 1 = 90^0.

h. Arc cot (2x/ (1-x^2)) + arc sin (x/v(1-x^2)) = arc tan 1/x

i. 2 arc sin 1/x = arc sin ($2\sqrt{x^2-1}$ // x^2

22

j. 2 arc tan x = arc cos $(1-x^2)/(1+x^2)$

BAB IX
LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Telah dibicarakan dalam Aljabar bahwa jika $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dan

$\lim_{x \to a} P(x) = B$, maka :

1. $\lim_{x \to a} f(x) \pm F(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} F(x)$

2. $\lim_{x \to a} cf(x) = c. \lim_{x \to a} f(x) = cA$ (c biangan tetap)

3. $\lim_{x \to a} f(x). F(x) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} F(x) = A . B$\

4. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \lim_{x \to a} (f(x))^n = A^n$

5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} F(x)}$

Sifat-sifat limit fungsi aljabar tersebut diatas berlaku pula pada sifat-sifat limit fungsi trigonometri.

Rumus-rumus limit fungsi trigonometri yang terpenting adalah :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

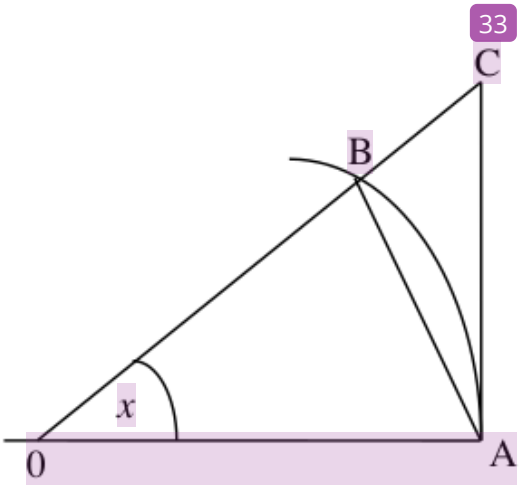
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Bukti :

Gambar dibawah ini adalah gambar sebuah sector lingkaran yang sudut pusatnya adalah x radien.



Gambar 42

x adalah sudut lancip

CA adalah garis singgung lingkaran di titik A dan memotong perpanjangan OB di C

OA dan OB adalah jari-jari lingkaran

Selanjutnya,

Luas Δ OAB < luas sector OAB < luas Δ OAC.

Luas Δ OAB = ½ (OA) (OB) sin x = ½ (r) (r) sin x = ½ r^2 sin x.

Luas sector OAB = (x/ π)(πr^2) = ½ r^2x.

Luas Δ OAC = ½ (OA)(AC) = ½ (r) (r tan x) = ½ r^2 tan x

Maka,

$$\tfrac{1}{2} r^2 \sin x < \tfrac{1}{2} r^2 \; x < \tfrac{1}{2} r^2 \tan x$$

Masing-masing ruas dibagi dengan ½ r^2, didapat :

$$\text{Sin } x < x < \tan x.$$

Jika sin x < x < tan x masing-masing ruas dibagi dengan sin x diperoleh,

$$1 < x/\sin x < 1/\cos x\ .$$

Jika x mendekati nol, maka $\frac{1}{\cos}$ x mendekati satu. Dan jika x mendekati nol, maka $\frac{x}{sin}$ x mendekati satu.

Jadi,

$$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

- $1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos 0}$
- $1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{1}$
- $1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$

Berarti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Selanjutnya, jika masing ruas dari $\sin x < x < tg\, x$ dibagi dengan $tg\ x$, maka didapat :

$$\cos x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

- $\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{tg\ x} < \lim_{x\to 0} 1$

- $\cos 0 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{tg\ x} < 1$
- $1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{tg\ x} < 1$

Berarti, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{tg\ x} = 1.$

Dari bentuk $1 < \frac{x}{\sin\ x} < \frac{1}{\cos\ x}$ diubah menjadi :

$$1 > \frac{\sin\ x}{x} > \frac{\cos\ x}{1}$$

- $\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos\ x$
- $1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \cos 0$
- $1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x} > 1$

Berarti,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dan,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x\cos\ x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{} \cdot \frac{1}{\cos\ x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos\ x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos\ 0}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Jadi, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan\ x}{x} = 1.$

<u>Contoh 1.</u>

Hitunglah : a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin\ 5x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 5x^2}{(1+2x)\sin\ x}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin\ 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin\ 5x} \cdot \dfrac{5}{5}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin\ 5x} \cdot \dfrac{3}{5}$

$= \dfrac{3}{5} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin\ 5x}$

Misalkan, $5x = t$, maka untuk $x \to 0,\ t \to 0$.

Sehingga, $\dfrac{3}{5} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin\ 5x} = \dfrac{3}{5} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{t}{\sin\ t}$

$= \dfrac{3}{5} \cdot 1$

$= \dfrac{3}{5}$.

Jadi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin\ 5x} = \dfrac{3}{5}$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 5x^2}{(1 + 2x)\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x + 5x)x}{(1 + 2x)\sin\ x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x + 5x^2)}{(1 + 2x)\sin\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2\ + 5x)x}{(1+2x)\sin\ x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+5x}{1+2\,(0)} \cdot 1\ = 2.$

<u>Contoh 2.</u>

Hitunglah : a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\ ax}{bx}$

b. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{1 + \cos\ x - \sin\ x}{\cos\ x - 1\ + \sin\ x}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{a}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = \dfrac{a}{b}$

$= \dfrac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax}$

Misalkan, $ax = t$, maka untuk $x \to 0, \quad t \to 0$.

Sehingga,

$\dfrac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}$

$= \dfrac{a}{b} \cdot 1 = \dfrac{a}{b}$

<u>Contoh 3.</u>

Hitunglah : a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + x}{tg\ 2x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\cos 5x}{co\,tg\ 3x}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + x}{tg\ 2x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x\,(2x + 1)}{tg\ 2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{tg\ 2x} \cdot (2x + 1)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{tg\ 2x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} (2x + 1)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}(2x)}{tg\ 2x} \cdot 1.$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)}{tg\ 2x} \cdot 1.$

$= \dfrac{1}{2}\,(1) \cdot (1) = \dfrac{1}{2}.$

b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 5x}{co\,tg\ 3x}.$

Misalkan $x - \frac{1}{2}\pi = t$, maka $x = t + \frac{1}{2}\pi$.

Untuk $x \to \frac{1}{2}\pi,\ t \to 0$.

Sehingga,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{co\ t\ 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(5t + \frac{5}{2}\pi\right)}{co\ tg\left(3t + \frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 5t}{-tg\ 3t}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5t}{tg\ 3t}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5t}{5t} \cdot \frac{3t}{tg\ 3t} \cdot \frac{5}{3}$$

$$= 1\frac{5}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5t}{5t} \cdot \frac{3t}{tg\ 3t}$$

$$= \frac{5}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5t}{5t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3t}{tg\ 3t}$$

$$= \frac{5}{3}\ (1)(1) = \frac{5}{3}.$$

<u>Contoh 4</u>

Hitunglah : a. $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{5x}$

b. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{co\ tg\ x}{x - \frac{1}{2}\pi}$

Jawab :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{\frac{5}{3}(3x)}$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{(3x)}$$

Misalkan, $3x = t$, maka $x \to 0,\ t \to 0$.

Sehingga, $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{tg\ t}{t} = 1.$

Jadi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ 3x}{5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{tg\ 3x}{0\ (3x)} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{tg\ 3x}{t}$$

$$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}.$$

b. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{co\ tg\ x}{x-\frac{1}{2}\pi} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{tg\ (\frac{1}{2}\pi - x)}{\pi - (\frac{1}{2}\pi - x)}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{tg\ (\frac{1}{2}\pi - x)}{\pi - (\frac{1}{2}\pi - x)}$$

Misalkan $\frac{1}{2}\pi - x = tm$ maka $x \to \frac{\pi}{2}.\ t \to 0.$

Sehingga,

$$-\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{tg\ (\frac{1}{2}\pi - x)}{\pi - (\frac{1}{2}\pi - x)} = -\lim_{t\to 0}\frac{tg\ t}{t}$$

$$= -1.$$

Jadi,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{co\ tg\ x}{\pi\ x - \frac{1}{2}\pi} == -1.$$

Catatan :

Dari contoh-contoh di atas dapat disimpulkan :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin\ ax} = 1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ ax}{ax} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{tg\ ax} = 1$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\ ax}{ax} = 1.$

Contoh:

Hitunglah : a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{tg\ 2x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ 5x}{sin\ 3x}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{tg\ 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{2x}{tg\ 2x} \cdot \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{tg\ 2x}$

$= \dfrac{3}{2}\ (1)(1) = \dfrac{3}{2}.$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ 5x}{sin\ 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ 5x}{5x} \cdot \dfrac{3x}{\sin\ 3x} \cdot \dfrac{3x}{\sin\ 3x}$

$= \dfrac{5}{3} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin\ 3x}$

$= \dfrac{5}{3}\ (1)\ (1) = \dfrac{5}{3}.$

LATIHAN SOAL

Hitunglah :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin 7x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sin 9x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin 9x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1 - \cos 4x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos (x+h) - \cos x}{h}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{tg\ 9x}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{tg\ 5x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{tg\ 5x}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ 5x}{tg\ 7x}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} x\ co\ tg\ 2x$

16. $\lim\limits_{x \to 3}$ (x-3) co tan $(\pi\ x)$

24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - tg\ x}{\sin x - \cos x}$

25. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{co\ tg\ x - co\ tg\ a}{x - a}$

26. $\lim\limits_{x \to a} x\ (1 - \cos \frac{a}{x})$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{co\,tg\,x - tg\,x}{\frac{\pi}{4} - x}$

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\lim x - \cos x}{1 - tg\ x}$

19. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\pi \cos x}$

20. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{tg\ x}$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

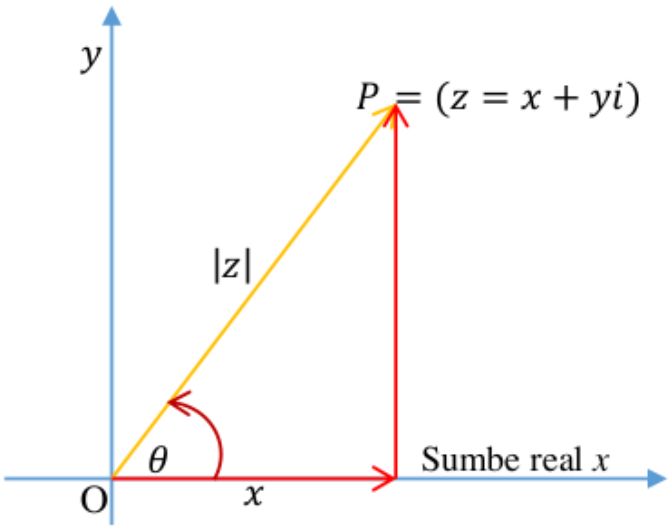
22. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{x - \pi}$

23. $\lim\limits_{x\to n} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

BAB X
BILANGAN KOMPLEKS

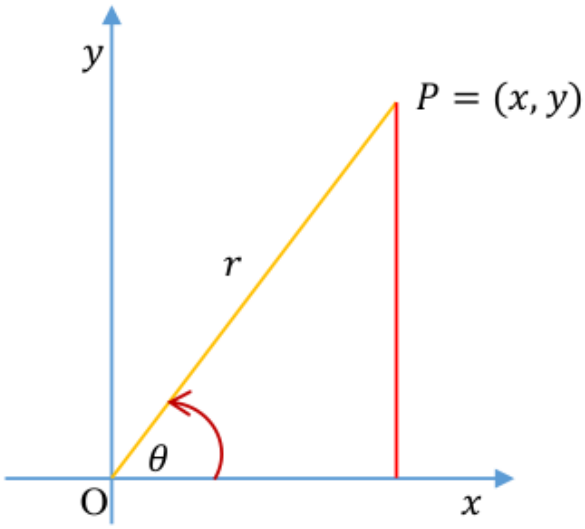
A. Representasi Trigonometri dari suatu Bilangan Kompleks

Pada aljabar telah dikenal bilangan kompleks : $z = x + yi$, dimana $i = v\,(1)$, x suku nyata, yi suku imaginer, dan x, y nyata. Bilangan kompleks $z = x + yi$ secara geometri dinyatakan dengan suatu titik p dari vector op dalam bidang kompleks/ sistim sumbu kompleks seperti ditunjukan pada gambar 43. Sedangkan pada gambar 44, pasangan bilangan nyata x, y menyatakan titik p pada bilangan real. Terlihat bahwa titik $p\,(z)$ pada bidang kompleks (gambar 43) berkorespondensi tepat satu titik $p\,(x, y)$ pada bidang real (gambar 44).



Gambar 43 (Bidang Kompleks)

r



Gambar 44 (Bidang Real)

Selanjutnya,

$|z| = r = v(x^2 + y^2)$, dan disebut modulus bilangan kompleks z.

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ atau $\theta = arc\ tg\frac{y}{x}$, dan θ disebut argument bilangan kompleks z, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka,

$$z = x + yi$$

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta\,.i$$

$$z = r\,(\cos\theta + r\sin\theta)$$, atau disingkat $z = r\ cis\ \theta$.

$= x + yi$ adalah pernyataan (representasi) bilangan kompleks dalam aljabar.

$= r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah pernyataan bilangan kompleks dalam trigonometri.

Karena periode kosinus dan sinus adalah 2π, maka bentuk umum bilangan kompleks dalam trigonometri adalah :

$$z = r\ (\cos\ (\theta + n.2\pi) + i\ \sin(\theta + n.2\pi))n\ \in B.$$

Contoh 1.

Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 + v3\,i$ dalam bentuk trigonometri.

Jawab : $|z| = V\ (1^2 +\ (V3)^2) = V4 = 2$

$\theta = arc\ \ tg\frac{v3}{1} = \frac{1}{3}\pi$, sebab θ dikuadrat 1.

Jadi, $z = 2\ (\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\ )$.

Contoh 2.

Yatakan bilangan kompleks $z = -v3 + i$ dalam bentuk trigonometri.

Jawab :

$|z| = v\ ((-v3)^2 +\ (1)^2) =\ v4 =\ 2.$

$\theta = are\ tg\frac{1}{-v3} = \frac{5}{6}\pi$, sebab θ dikuadrat II.

Jadi, $z = 2\ (\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\ )$.

Contoh 3.

Nyatakan bilangan kompleks $z = -1 - v3\,i$ dalam bentuk trigonometri.

Jawab :

$|z| = v(\ (-1)^2 +\ (\ -v3)^2) = v4 = 2.$

$\theta = arc\ tg - \frac{1}{-v3} = \frac{4}{3}\pi$, sebab θ dikuadrat III.

Jadi, $z = 2\ (\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$.

Contoh 4.

Ntatakan bilangan kompleks $z = v2\ (\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin 5/1$ dalam bentuk aljabar.

Jawab : $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{v2}$

$\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{v2}$

Jadi, $z = v2(\ (-\frac{1}{v2} + i\ \left(-\frac{1}{v2}\right))$

$z = -1 - i.$

Contoh 5.

Nyatakan bilangan kompleks $z = 3v2\ (\cos\ 315° + i\sin 31$ dalam bentuk aljabar.

Jawab : $\cos\ 315° = \cos\ 45° = 1/v2.$

$\sin\ 315° = -\sin 45° = -1/v2.$

jadi, $z = 3v2\ ((\frac{I}{v2} + i\ \left(-\frac{1}{v2}\right))$

$z = 3 - 3i.$

Latihan 10 no.

Nyatakanlah bilangan-bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk trigonometri.

1. $z = -1 + v3\ i$
2. $z = v3 + i$
3. $z = -v2 + v2\ i$
4. $z = -1 - v3\ i$

5. $z = -v2 + v2\, i$

6. $z = -v3 - \ i$

7. $z = 1 - v3\, i$

8. $z = -5$

9. $z = -5\,\mathrm{i}$

10. $z = a + bi, a < 0, b < 0.$

Nyatakan bilangan-bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk aljabar.

1. $z = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi).$

2. $z = -2(\cos(-\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi)).$

3. $z = 2(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi).$

4. $z = 3\theta\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi).$

5. $z = -8(-\frac{3}{2}\pi + i\sin(-\frac{1}{3}\pi)).$

6. $z = 3(\cos(-30°) + i\sin(-30°)).$

7. $z = -2(\cos 60° + i\sin 60°).$

8. $z = 2(\cos 330° + i\sin 330°).$

9. $z = -2(\cos 120° + i\sin 120°).$

10. $z = \cos 225° - i\sin 225°.$

11. $z = 4\,(\cos - (225°) - i\sin(225°).$

12. $z = 5\,(\cos 0° - i\sin 0°).$

B. Perkalian dan Pembagian Bilangan Kompleks

Operasi perkalian bilangan kompleks dapat disederhanakan dengan menggunakan representasi trigonometri, seperti terlihat pada teorema berikut ini.

Teorema.

Jika $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, dan

$z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka

$z_1 z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$.

Bukti :

$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))\,(r_2\,\cos\theta_2 + \sin\theta_2))$.

$= r_1 r_2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$= r_1 r_2\,(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i)\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 -$

$\sin\theta_1\sin\theta_2)$.

$= r_1 r_2\,((\cos\theta_1\cos\theta_2 - i)\sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 +$

$\cos\theta_1 sin\,\theta_2))$.

$= r_1 r_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$, terbukti.

Contoh 1.

Tentukan hasil kali $z_1 z_2$, jika $z_1 = 3(\cos 78° + i\sin 78°$ dan $z_2 = 2(\cos 42° + i\sin 42°)$.

Jawab :

$r_1 = 3, \theta_1 = 76°$, dan $r_2 = 2, \theta_2 = 42°$.

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$.

$= 3\,2\,(\cos(78° + 42°) + i\sin(78° + 42°))$.

$= 6\,(\cos(120° + i\sin 120°) = 6(-\cos 60° + i\sin 60°)$

$= 6\,(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}.\,\mathrm{v}3/2) = -3 + 3v3\,i$.

Contoh 2.

Tentukan hasil kali $z_1 z_2$, jika $z_1 = \frac{1}{2}\,(\cos 189° + i \sin 189°)$, dan $z_2 = 4(\cos 141° + i \sin 141°)$.

Jawab :

$r_1 = \frac{1}{2}, \theta_1 = 189°$, dan $r_2 = 141°$.

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$.

$= \left(\frac{1}{2}\right)(4)(\cos(189° + 141°) + i \sin(189° + 141°))$.

$= 2(\cos 330° + i \sin 330°)$

$= 2(\cos 30° - i \sin 30°)$

$= 2\left(\frac{\frac{v3}{2} - 1}{2} i\right)$

$= v3 - i$.

Contoh 4.

Tetukan hasil kali $z_1 z_2$, jika $z_1 = 5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$, dan $z_2 = -4\,(\cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi)$.

Jawab :

$z_1 z_2 = (5)(-4)(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)\,(\cos \frac{2}{3\pi} - i \sin \frac{2}{3}\pi)$

$$z_1 z_2 = -20(\cos \frac{3}{2}\pi \frac{cos2}{3\pi} - i \sin \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{3}{2}\pi \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$+ i \sin \frac{3}{2}\pi \cos \frac{2}{3}\pi.$$

$$= -20\ ((\cos\tfrac{3}{2}\pi\cos\tfrac{2}{3}\pi + \sin\tfrac{3}{2}\pi\sin\tfrac{2}{3}\pi) +$$

$$i\ (\sin\tfrac{3}{2}\pi\cos\tfrac{2}{3}\pi - \cos\tfrac{3}{2}\pi\sin\tfrac{2}{3}\pi))\,.$$

$$= -20\ \left(\cos(\frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + \ i\sin(\frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi))$$

$$= -20\ (\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$$

$$= -20\ (-\frac{\text{v}3}{2} + \frac{1}{2}i\ )$$

$$= 10v3 - 10\ i.$$

Selanjutnya operasi pembagian bilangan kompleks dapat pula disederhanakan dengan menggunakan reprsentasi geometri, seperti pada teorema berikut ini.

Teorema.

Jika $z_1 = r_1\ (\cos\theta_1 + \ i\sin\theta_1)$, dan

$z_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + \ i\sin\theta_2)$, maka

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \ (\cos\theta_1 - \ \theta_2) + \ i\sin(\theta_1 - \theta_2)), z_2 \neq 0.$

Bukti :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \ (\cos\theta_1 + \ i\sin\theta_1)$$

$$(\cos\theta_2 + \ i\sin\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\quad\theta_2)$$

$$(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\quad\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + \ i\ (\cos\theta_1\cos\theta_2 -$$

$\cos\theta_1\sin\theta$

$r^2\ (cos^2\ \theta_2 + sin^2\ \theta_2)$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\ \sin(\theta_1 - \theta_2)\ \ = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) +$$

(1) I sin $(\theta_1 - \theta_2))$.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan hasil bagi z_1/z_2 ,jika z_1 = 6(cos 271º + isin 271º)

dan z_2 = 2 (cos 136º + isin 136º).

$\frac{z_1}{z_2}$ = $\frac{6}{2}$ (cos (271º - 136º) + isin (271º - 136º))

= 3 (cos 135º = isin 135º)

= 3(-c0s 45º + isin 45º)

= 3 (-1/v2 + 1/v2 i)

= -3v2/2 + 3v2 /2 i.

<u>Contoh 2</u>

Tentukan hasil bagi z_1/z_2, jika z_1 = 2 (cos 15º + isin 45º)

dan z_2 = 3 (cos 45º + isin 45º).

$\frac{z_1}{z_2}$ = $\frac{2}{3}$ (cos (15º - 45º) + isin (15º - 45º))

= 2/3 (cos (-30º) + isin (-30º))

= 2/3 (cos 30º - isin 30º)

= 2/3 (v2 /2 - 1/2 I)

= v2/3 - 1/3 i.

Contoh 3

Tentukan hasil bagi z_1/z_2 , jika z_1 = 6 (cos (- 120º) + isin (120º))

dan z_2 = 2(cos 30º + isin 30º).

Jawab :

z_1/z_2 = 6/2 (cos (-120º - 30º) + isin (-120º - 30º))

= 3 (cos (-150º) + isin (-150º))

= 3 (cos 150º + i(-sin 150º))

= 3 (-cos 30º + I (-sin 30º))

= 3(-cos 30º - isin 30º)

= 3 (-v 3/2 - 1/2 i

= - 3v3/2 - 3/2 i.

Contoh 4.

Tentukan hasil bagi z_1/z_2 , jika z_1= 2 (cos 1/3 π + I sin 1/3 π)

dan

z_2 = 6 (cos (-1/2 π) + isin (-1/2 π))

Jawab :

z_1/z_2 = 2/6 (cos (1/3 π + 1/2 π) + isin (1/3 π +1/2 π))

= 1/3 (cos 5/6 π + isin 5/6 π)

= 1/3 (-cos 1/6 π + isin 1/6 π)

= 1/3 (-v3/2 π + 1/2 i)

= -v3/6 + 1/6 i

Contoh 5.

Tentukan hasil bagi z_1/z_2 , jika z_1= 4 (cos 2/3 π + isin 2/3 π

dan

z_2 = cos 1/6 π + isin 1/6 π.

Jawab :

z_1/z_2 = 4/1 (cos (2/3 π - 1/6 π) + isin (2/3 π +1/6 π))

= 4 (cos 1/2 π + isin 1/2 π)

= 4(0 + i.1) =4i.

LATIHAN SOAL

Tentukan hasil kali $z_1 \times z_2$ dari soal-soal di bawah ini :

z_1 = 5 (cos 150º + isin 150º) dan z_2 = 3 (cos 135º + isin 135º)

z_1 = 2 (cos (-50º) + isin (-50º)), z_2 = 3 (cos -40º) + isin (-40º))

z_1 =2(cos 38º + isin 38º, z_2 = 4 (cos 82º + isin 82º)

z_1 = cos 138º + isin 138º, z_2 = 2 (cos 132º + isin 132º)

z_1 = cos (- 40º) + isin (- 40º), z_2 = 5 (cos 130º + isin 130º)

z_1 = 3 (cos 1/15 π + isin 1/15 π) dan

z_2 = 2 (cos 3/5 π + isin 3/5 π).

z_1 = 2 (cos 1/6 π + isin 1/6 π), dan

z_2 = 3 (cos 1/3 π + isin 1/3 π).

z_1 = -4 (cos 1/3 π – isin 1/3 π), dan

z_2 = -2(cos 1/6 π + isin 1/6 π).

z_1 = 4 (cos (- 1/6 π)+ isin (- 1/6 π)), dan

z_2 = cos (- $1/3\ \pi$) + isin (- $1/3\ \pi$).

z_1 = -2 (cos $1/4\ \pi$ + isin $1/4\ \pi$), dan

z_2 = 3 (cos (-$1/4\ \pi$) + isin (-$1/4\ \pi$)).

Tentukan hasil bagi $z_1 \times z_2$ dari soal-soal di bawah ini :

11. z_1 = 1 – v3 i, z_2 = v3 + i.

12. z_1 = 3(cos 50º + isin 50º), z_2 = 2 (cos 20º + 20º).

13. z_1 = cos 35º + sin 35º, z_2 = cos 80º + 80º.

14. z_1 = 3 (cos 100º + isin 100º), z_2 = 6 (cos 235º + i sin 235º)

15. z_1 = -cos 141º + I sin 141º, z_2 = cos 189º - I sin 189º

16. z_1 = 3(cos $3/5\pi$ – I sin $3/5\pi$)

    z_2 = 2(cos $4/15\pi$ – I sin $4/15\pi$).

17. z_1 = - 4(cos(-$2/3\ \pi$) – I sin (-$2/3\ \pi$))

    z_2 = 2 (cos $1/6\pi$ – I sin $1/6\pi$).

18. z_1 = -6(cos (-2π) - (-2π)),

    z_2 = -3 (cos (-π) – I sin (-π)).

19. z_1 = 4 (cos (-$1/3\pi$) + i sin ((-$1/3\pi$)),

    z_2 = 2 (cos (-$4/3\pi$) + i sin (-$4/3\pi$)).

20. z_1 = 4 (cos (-$1/6\pi$) + i sin (-$1/6\pi$)),

    z_2 = 2(cos (-$1/3\pi$) + i sin ((-$1/3\pi$)).

Teorema De Moivre.

Berikut ini akan dibicarakan tentang perluasan perkalian dan bagian-bagian bilangan kompleks. Perluasan pembagian dan perkalian bilangan kompleks itu dapat dilihat pada teorema berikut ini.

Teorema

Jika z_k = r_k (cos Q_k + isin Q_k) untuk k ∈ $B_{+1,}$ Maka untuk n ∈ $+ B_{+1}$

$z_1 z_2 ..... z_n = r_1 r_2 ..... r_n$ (cos (Q_1 + Q_2.....Q_n) + isin (Q_1 + Q_2.....Q_n)).

Jika z_1 = z_2 = ...= z_n = z = r (cos (Q + isin Q), maka

z^n = r^n (cos nQ + isin Q), n ∈ B_+ .

Jika z_1 = 1, dan z_2 = r (cos Q + isin Q), maka

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r}$ (cos (-Q) + isin (-Q)) = $\frac{1}{r}$ $(\cos Q - i\sin Q)$

Sehingga: z^{-n} = r^{-n} (cos nQ - isinnQ), n ∈ B_+

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa, untuk n ∈ B, dan z = r (cos Q + isin Q), berlaku :

z^n = r^n (cos nQ + isin Q), n ∈ B .

Bentuk terakhir inilah yang disebut teorema De Moivre.

<u>Contoh 1</u>

Jika z = 1 + I, tentukan z^{100}.

Jawab :

z = 1 + i

r = v $((1)^2 + (1)^2)$ = v2.

θ = Arc tan 1 = $1/4\ \pi$.

Jadi,

z^{100} = $(v2)^{100}$ (cos 100 $(1/4\ \pi)$ + isin 100 $(1/4\ \pi)$

= 2^{50} (cos 25 π + 25 π).

= 2^{50} (cos π + isin π)

$= 2^{50}$ (-1 + I (0))

$= (-1)\ 2^{50}$.

Contoh 2

Hitunglah $(1 + i)^6$.

Jawab :

Misalkan, z = 1 + I maka

r = v $((1)^2 + (1)^2)$ = v 2.

θ = Arc tan 1 = $1/4\ \pi$.

Jadi,

x^6 = (v 2)^6 (cos 6 $(1/4\ \pi)$ + isin 6 $(1/4\ \pi)$)

= 8 (cos $3/2\ \pi$) + isin $3/2\ \pi$)

= 8 (0 + i(-1)) = -8i.

Contoh 3

Hitunglah (-1 + iv3)$^{-50}$

Jawab :

Misalkan z = -1 + iv3, maka

r = v $((-1)^2$ + (v3)^2) = 2.

θ = Arc tan ($\frac{v3}{-1}$) = Arc tan (- v3) = $2/3\pi$,

Sebab θ terletak di kuadran II.

Jadi,

z^{-50} = (-1 + I v3)$^{-50}$

= (2(cos $2/3\pi$ + isin $2/3\pi$))$^{-50}$

= $(2)^{-50}$ (cos (-50)($2/3\pi$) + isin (-50))($2/3\pi$)

$= 2^{-50}(\cos(-100/3\pi) + i\sin(-100/3\pi)$

$= 2^{-50} (\cos 100/3\pi - i\sin 100/3\pi)$

$= 2^{-50} (- \cos 1/3\pi - i\sin 1/3\pi)$

$= 2^{-50}(-1/2 - I\ v3/2\pi)$

$= 2^{-51}(-1 - v3\ i)$.

Latihan 10c

Hitunglah :

1. $(1 + i)^5$ 2. $(v3 + i)^{150}$ 3. $((-1 + v3\ i)^{50}$

4. $(1 + i)^{-6}$ 5. $(v3 + i)^{-150}$ 6. $(1 - v3\ i)^{-50}$

7. $(1 - i)^{20}$ 8. $(v3 - i)^{-42}$ 9. $(-1 - i)^{65}$

10. $(2v2 - 2v2\ i)^{75}$ 11. $(1 + v3/3\ i)^{10}$ 12. $(v3/2 - 1/2\ i)^7$

13. $(3(\cos 15° + I \sin 15°))^6$ 14. $(2(\cos 135° + i\sin 135))$ 15. $(2(\cos 50° + I \sin 50°))^3$.

4. Akar dari suatu bilangan kompleks.

Akar ke n suatu bilangan komplekss z dimana n ∈ B, dapat diperoleh dengan cara seperti berikut ini. Misalkan z = x + yi = r (cos θ

+ I sin θ), maka akar ke n untuk n ∈ B dari z ialah suatu bilangan komplek

w = u + iv = ρ (cos Ø + i sin Ø) sedemikian sehingga w^n = z.

Selanjutnya,

$$w = z^{1/n} = (r (\cos \theta + I \sin \theta))^{1/n}.$$

Dan

$$w = \rho (\cos \emptyset + i \sin \emptyset)$$

Dengan demikian,

$$z^{1/n} = (r (\cos \theta + I \sin \theta))^{1/n}. = \rho(\cos \emptyset + i\sin \emptyset)$$

Maka,

$$r (\cos \theta + I \sin \theta) = \rho^n(\cos \emptyset + i\sin \emptyset))^n.$$

$$= \rho^n(\cos n\emptyset + i\sin n\emptyset)$$

Sehingga

$$r = \rho^n \text{ atau } \rho = vr, \text{ dan, } n\emptyset = Q \text{ atau } \emptyset = \frac{Q}{n}$$

Masukan harga-harga ρ dan Ø kedalam bentuk $z^{1/n} = \rho(\cos \emptyset + i\sin \emptyset)$ diperoleh bentuk :

$z^{1/n} = \frac{n}{V_r}$ (cos $\frac{Q}{n}$ + isin $\frac{Q}{n}$).

Karena diperoleh kosinus dan sinus adalah 2 π, maka secara umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$z^{1/n} = \frac{n}{V_r}$ (cos $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ + isin $\frac{\theta+2k\pi}{n}$), dimana

k∈{ 0, 1,2,....,n-1}.

Contoh 1:

Tentukan akar-akar dari pangkat empat dari bilangan kompleks z = -8 + 18V3.

Jawab :

Akar-akar dari akar pangkat dari z = -8 + 18V3.

Ialah penyelesaian persamaan w^4 – (-8 + 18V3) = 0.

Jika r dan Q modulus dan argument z, maka

z^3 = (r (cos Q + isin Q))^3

= r^3 (cos 3Q + isin 3Q)

Sehingga,

r^3 = 1 atau r = 1, dan 3Q = $1/3\pi$ + 2k π.

Atau Q = = $1/9\pi$ + $2/3\ k\pi$, $k = 0, 1,2$.

Jadi,

z_0 = cos $1/9\pi$ + isin $1/9\pi$.

z_1 = cos $7/9\pi$ + isin $7/9\pi$.

z_2 = cos $13/9\pi$ + isin $13/9\pi$.

b. Misalkan z akar-akar dari akar pangkat empat dari bilangan komplek 1, maka :

z^4 = (r (cos θ + isin θ)^4

= r^4 (cos 4 θ + isin 4 θ).

Sehingga,

r^3 = 1 atau r = 1, dan 4 θ = 0 + 2k π.

Atau $\theta = 0 + 1/2\ k\pi$, k = 0,1,2,3.

Jadi,

z_0 = cos 0 + isin 0 = 1.

z_1 = cos $1/2\pi$ + isin $1/2\pi$ =i.

z_2 = cos π + isin π = -1.

z_3 = cos $3/2\pi$ + isin $3/2\pi = -$i.

LATIHAN SOAL

Selesaikanlah:

1. $(-1)^{1/2}$
2. $8^{1/3}$
3. $(-i)^{1/3}$
4. $(16)^{1/2}$
5. $(-1)^{1/3}$
6. $(-8)^{1/3}$
7. $(-i)^{1/4}$
8. $(-16i)^{1/2}$
9. $(-1)^{1/4}$
10. $i^{1/2}$
11. $(8i)^{1/3}$
12. $(-i)^{1/6}$
13. $1^{1/2}$
14. $8.(-i)^{1/2}$
15. $(-8i)^{1/3}$
16. $(1+i)^{1/5}$
17. $(v3+i)^{2/5}$
18. $(1/2 - v3/2i)^{1/8}$
19. $(8(\cos 135° + i\sin 135°))^{1/3}$
20. $(1+i)^{2/3}$
21. $(-4 - 4\sqrt{3}\, i)^{1/2}$
22. $(64(\cos 2/3\pi + i \sin 2/3\pi)^{1/2}$

23. $2 - i)^{1/6}$

24. $(2 - 2v3\ i)^{1/4}$

25. (27 (cos 135° + isin 135°))

26. $(-4(\cos 1/3\pi - i\sin 1/3\pi))^{1/2}$

27. $(1 - i)^{1/10}$

28. $(-2 - 2v3\ i)^{1/4}$

29. $(-1/2 - v3/2\ i)^{2/3}$

30. $(-8(\cos 135° + i\sin 135°1))^{1/3}$

BAB XI
KONTRIBUSI AL-TUSI DAN AL-BATTANI DALAM TRIGONOMETRI

Ketika sekolah kebanyakan dari kita pertama kali bermain-main dengan trigonometri, sekaligus menyerahkan kalkulator ilmiah untuk pertama kalinya untuk menentukan sinus, cosinus, dan garis singgung sudut. Bagi sebagian dari kita - mungkin lebih akurat untuk mengatakan hanya beberapa - fungsi aneh ini disambut dengan pesona dan kegembiraan, mewakili pertemuan nyata pertama dengan matematika non-sepele. Dalam kebanyakan kasus, presentasi trigonometri disampaikan dalam konteks masalah yang melibatkan segitiga, yang cukup cepat menjadi agak berulang dan membosankan. Akibatnya, banyak siswa tidak menghargai relevansi penting dan pentingnya trigonometri dalam memecahkan masalah yang lebih menarik dan kompleks, diambil dari astronomi, kartografi dan navigasi, untuk menyebutkan beberapa bidang.

Kelahiran trigonometri terletak pada astronomi, salah satu ilmu yang paling giat dipelajari oleh umat Islam, terutama karena relevansinya dalam menentukan waktu-waktu yang tepat untuk salat. Tetapi bahkan sebelum umat Islam, astronom Yunani menghitung sisi dan sudut yang tidak diketahui dari segitiga tertentu, mengingat nilai sisi atau sudut yang tersisa, untuk memahami gerakan matahari, bulan dan, yang kemudian diketahui, lima planet.

Termotivasi oleh pertanyaan-pertanyaan seperti posisi matahari, bulan dan planet-planet, orang-orang Yunani menyusun tabel dan aturan yang memungkinkan masalah-masalah yang berkarakter geometris dapat

ditangani. Perlakuan yang paling menyeluruh dari subjek dapat ditemukan di *The Almagest* dari Ptolemy, seorang astronom yang bekerja di Alexandria pada bagian awal abad kedua Masehi. Risalah Ptolemy mencapai sarjana Eropa melalui tangan Muslim, yang diberikan judul asli Yunani (yang berarti *The Great Arrangement*) dalam istilah yang lebih ringkas dan superlatif melalui kombinasi transliterasi dan pra-pending untuk menghasilkan *Al-Majest* , hanya berarti *The Greatest*, dengan demikian mencerminkan posisi terhormat karya yang dinikmati di kalangan ilmuwan Muslim. Para astronom Helenis pada prinsipnya akan menggambar di atas sebuah meja yang ditemukan dalam Buku I dari *Almagest* yang dilambangkan sebagai "A Table of Chords in a Circle," untuk menyelesaikan semua masalah trigonometri bidang mereka. Untuk busur-busur yang membentuk sudut dengan pertambahan setengah derajat sampai dengan 180 derajat, tabel memberikan panjang tali busur yang membentuk sudut-sudut dalam lingkaran berjari-jari 60 satuan. Dalam karyanya, *The Transversal Figure*, astronom Muslim abad ketiga belas Nasir al-Din Al-Tûs menjelaskan bagaimana tabel panjang akord ini digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan segitiga siku-siku. Al-Tûs membuat pengamatan penting yang menetapkan hubungan antara segitiga dan busur lingkaran: segitiga apa pun dapat ditulisi dalam lingkaran, dan oleh karena itu, sisi-sisinya dapat dilihat sebagai tali busur yang menutupi busur yang berlawanan dengan sudut segitiga. Kelemahan dari ketergantungan seperti itu pada tabel ini ada dua. Pertama, manipulasi tabel dan langkah-langkah menengah diperlukan untuk menyelesaikan semua variasi yang mungkin muncul dalam menyelesaikan panjang atau sudut segitiga siku-siku yang tidak diketahui. Ini

berbeda dengan menggunakan enam fungsi trigonometri yang sudah dikenal – sinus, kosinus dan tangen dan kebalikannya, garis potong, kosekan dan kotangen – yang merupakan karakteristik teknik modern, yang pertama kali dirancang dan disusun secara sistematis oleh matematikawan Muslim. Ketidaknyamanan kedua dari tabel panjang akord adalah bahwa mereka sering membutuhkan sudut yang digandakan untuk menghitung panjang busur.

Sebenarnya, rantai cendekiawan Muslim sebelum abad ke-10 telah meletakkan dasar trigonometri, membuka jalan bagi Nasir al-Din Al-Ts untuk mengumpulkan, mengatur dan menguraikan kontribusi. Adalah Mohammed Ibn Jabir ibn Sinan Abu Abdullah, yang dikenal sebagai Al-Battani, karena ia lahir di Battan, Mesopotamia, yang merupakan salah satu tokoh paling berpengaruh dalam trigonometri. Dia dianggap sebagai salah satu astronom dan matematikawan Muslim terbesar, yang akhirnya meninggal di Damaskus pada 929 M. Motivasinya untuk merintis studi trigonometri adalah pengamatannya tentang pergerakan planet:

> *" ... setelah lama menerapkan diri dalam studi ilmu ini, saya telah memperhatikan bahwa karya-karya tentang pergerakan planet-planet berbeda secara konsisten satu sama lain, dan bahwa banyak penulis membuat kesalahan dalam cara melakukan pengamatan mereka, dan menetapkan aturan mereka. . Saya juga memperhatikan bahwa seiring waktu, posisi planet-planet berubah menurut pengamatan baru-baru ini dan yang lebih tua; perubahan yang disebabkan oleh kemiringan ekliptika, yang mempengaruhi perhitungan tahun dan gerhana. Fokus terus-menerus pada hal-hal ini mendorong saya untuk menyempurnakan dan mengkonfirmasi sains semacam itu. "*

Lebih penting lagi, al-Battani menjelaskan operasi matematika dan mendesak orang lain *"untuk melanjutkan pengamatan, dan untuk mencari"* ,

untuk menyempurnakan dan memperluas karyanya. Selain Al-Battani, Abu al-Wafa, Ibn Yunus dan Ibn al-Haytham semuanya mengembangkan trigonometri bola dan menerapkannya pada solusi masalah astronomi.

Al-Battani adalah orang pertama yang menggunakan ungkapan "sinus" dan "cosinus", mendefinisikannya sebagai panjang, bukan rasio seperti yang kita kenal sekarang; definisi asli sinus dengan mudah diperoleh dari versi modern dengan mengalikan dengan sisi miring dari segitiga yang bersangkutan. Garis singgung itu disebut oleh Al-Battani sebagai "bayangan yang diperluas," bayangan batang horizontal nosional yang dipasang di dinding. Al-Bîrûnî (973-1048 M) mendefinisikan fungsi trigonometri tangen dan kotangen, yang diwariskan dalam bentuk tentatif dari suku Indian. Al-Bîrûnî termasuk di antara mereka yang meletakkan dasar bagi trigonometri modern; Mohammed bin Musa al-Khawarizmi, lahir pada 780 M, mengembangkan tabel sinus, kosinus, dan trigonometri, yang kemudian diterjemahkan ke Barat.

Sebagai penutup, perlu diungkapkan beberapa pencapaian penting lainnya di bidang trigonometri oleh umat Islam, dan juga aplikasi luar biasa oleh Al-Bîrûnî dalam mengukur keliling bumi. Hukum sinus yang sangat diperlukan dinyatakan dan dibuktikan oleh Nasir al-Din Al-Tûs dengan memanfaatkan dan dengan cerdik menggunakan ide-ide dasar geometri. Dia kemudian melanjutkan untuk menerapkan hukum untuk menyelesaikan semua jenis masalah secara sistematis. Abu al-Wafa' membuktikan teorema penjumlahan yang sudah dikenal untuk sinus, yang jauh lebih efisien dan elegan dibandingkan dengan pernyataan asli di *Almagest*melibatkan panjang chord. Sebelum munculnya komputer, penting untuk membuat tabel akurat

dari fungsi kunci untuk nilai spasi reguler dari argumen fungsi. Ini adalah prosedur yang melelahkan dan padat karya; dalam kasus tabel trigonometri, pertama-tama diperlukan cara yang sangat tepat untuk menghitung sinus 1 derajat, dan kedua, seperangkat aturan untuk interpolasi berdasarkan tabel. Kedua isu ini menjadi bahan kajian kritis oleh sejumlah sarjana Muslim, seperti Al-Bîrûnî, Ibn Yunus dan Al-Kashi. Untuk mencapai pendekatan sinus 1 derajat, Al-Kashi menggunakan prosedur yang dalam bahasa modern disebut sebagai metode iteratif.

Orang Yunani gemar melakukan survei geodik untuk menentukan berbagai jarak fundamental yang terkait dengan bumi, seperti kelilingnya. Salah satu metode tersebut dijelaskan oleh Ptolemy dalam bukunya *Geography* . Al-Bîrûnî dikenal karena karakteristik humornya yang kering dan menggunakannya secara maksimal untuk memperkenalkan metodenya menghitung keliling bumi: " *Berikut adalah metode lain untuk menentukan keliling bumi. Tidak perlu berjalan di gurun.* Eksperimen itu dilakukan saat dia bepergian dengan Raja Mahmud dari Ghazna di tempat yang sekarang kita kenal sebagai India barat laut. Dia mencatat akunnya yang cepat di *On Determination of the Coordinates of Cities*. Metode ini dilakukan dari puncak gunung dan membutuhkan pengetahuan tentang ketinggiannya, dan karenanya, Al-Bîrûnî pertama-tama menetapkan metode untuk menentukan kuantitas ini. Seperti yang dicatat oleh Al-Bîrûnî, ia menggunakan metode di sebuah gunung dekat Nandana di India: " *Ketika saya kebetulan tinggal di benteng Nandana di tanah India, saya mengamati dari gunung tinggi yang berdekatan yang berdiri di sebelah barat benteng,*

sebuah rencana terletak di selatan gunung. Terpikir oleh saya, saya harus memeriksa metode ini di sana."

Nilai akhir untuk keliling ditemukan sesuai dengan nilai yang ditentukan oleh prosedur yang lebih rumit yang melibatkan survei geodesi. Seperti yang dinyatakan Berggren, *"tidak diragukan lagi, hati al-Bîrûnî senang menunjukkan bahwa argumen matematis sederhana yang dikombinasikan dengan pengukuran dapat dilakukan sebaik dua tim surveyor berjalan-jalan di padang pasir"*.

Trigonometri sekarang dapat ditambahkan ke daftar bidang pengetahuan penting yang dikuasai oleh umat Islam dan selanjutnya disampaikan ke Eropa melalui berbagai rute. Kontribusi fasih diringkas oleh Berggren:

> *" Kita telah melihat di bagian sebelumnya bahwa matematikawan Muslim mengatur trigonometri ke dalam disiplin sistematis, yang teorinya bertumpu pada enam fungsi dan berbagai hasil yang kuat, seperti Hukum Sinus dan identitas trigonometri kunci tertentu ... Jadi trigonometri mengambil tempatnya, di samping aljabar dan aritmatika, sebagai bagian dari warisan kita dari matematika Islam."*

BAB XII
ORANG-ORANG ARAB MENGUMPULKAN PENGETAHUAN DARI DUNIA YANG DIKENAL

Peradaban Arab secara tradisional menandai permulaannya dari tahun 622 M, tanggal ketika Muhammad, diancam akan dibunuh, melarikan diri dari Mekah ke Medina di mana Muhammad dan para pengikutnya menemukan keselamatan dan rasa hormat. Lebih dari satu abad kemudian, orang-orang Arab telah memantapkan diri mereka sebagai kekuatan terpadu yang kuat di sebagian besar Timur Tengah dan Khalifah *Abu Ja'far Al-Mansour* pindah dari Damaskus untuk mendirikan kota Baghdad selama tahun 762 hingga 766. Mansour mengirim utusannya untuk mencari dan mengumpulkan pengetahuan. Dari Cina, mereka belajar cara membuat kertas, dan menggunakan keterampilan baru ini, mereka memulai program penerjemahan teks matematika, astronomi, sains, dan filsafat ke dalam bahasa Arab. Pekerjaan ini dilanjutkan oleh penerusnya, Khalifah *Mohammad Al-Mahdi*dan *Harun Al-Rasyid* . Pencarian pengetahuan menjadi bagian yang langgeng dan penting dari budaya Arab.

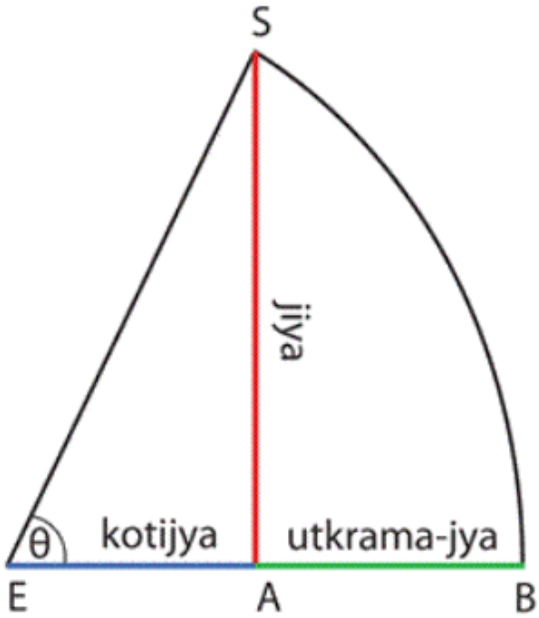
Al-Mansour telah mendirikan akademi ilmiah yang disebut 'Rumah Kebijaksanaan'. Akademi ini menarik banyak sarjana dari berbagai negara dan agama ke Baghdad untuk bekerja sama dan membangun tradisi ilmu pengetahuan Arab yang berlanjut hingga Abad Pertengahan. Beberapa dari karya ini kemudian diterjemahkan ke dalam bahasa Latin oleh para sarjana Abad Pertengahan dan diteruskan ke Eropa. Dominasi Baghdad dan pengaruh Dunia Arab berlangsung selama 500 tahun ke depan.

Para cendekiawan di Rumah Kebijaksanaan berasal dari banyak budaya dan menerjemahkan karya-karya astronom dan matematikawan Mesir, Babilonia, Yunani, India dan Cina. Risalah Matematika Ptolemy adalah salah satu yang pertama diterjemahkan dari bahasa Yunani ke bahasa Arab oleh *Ishaq ben Hunayn* (830-910). Itu dikagumi karena isinya yang luas dan dikenal dalam bahasa Arab sebagai *Al-Megiste* (Kitab Besar). Nama ' *Almagest* ' terus berlanjut hingga hari ini dan diakui sebagai sintesis besar dan puncak dari astronomi matematika dunia Yunani kuno. Itu diterjemahkan ke dalam bahasa Arab setidaknya lima kali dan merupakan dasar dari astronomi matematika yang dilakukan di dunia Islam.

BAB XIII
INDIA: SINUS, COSINUS, DAN TANGEN

Astronomi Yunani mulai dikenal di India pada periode 300-400 M. Namun, astronom India telah lama menggunakan data planet dan metode perhitungan dari Babilonia, dan meskipun itu jauh setelah Ptolemy menulis Almagest, astronom India abad ke-4 tidak sepenuhnya mengambil alih teori planet Yunani. Karya-karya kuno seperti *Panca-siddhantica* (sekarang hilang) yang telah ditransmisikan melalui versi Vrahamihira dan *Aryabhatiya* (499 M) dari Aryabhata menunjukkan bahwa para sarjana India memiliki cara mereka sendiri dalam menangani masalah astronomi dan bahwa mereka memiliki keahlian yang hebat dalam berhitung.[Lihat Catatan 1 di bawah]

Bahkan dalam teks-teks India tertua, Chord untuk mengingatkan tentang Chords lihat bagian Claudius Ptolemy tidak digunakan, dan sebaliknya muncul beberapa versi awal tabel trigonometri menggunakan Sines. Namun, para astronom India membagi busur menjadi 24 bagian, sehingga memperoleh nilai Sinus untuk setiap 3^\lingkaran 45' busur. $90°, 243°, 45°$



Gambar 44

Dalam diagram ini, adalah busur untuk sudut θ dan *AS* adalah *jiya* . Jadi hubungan antara *jiya* dan sinus kita adalah:

$$jiya(\theta) = Rsin\theta$$

dimana *R* adalah jari-jari lingkaran.

Banyak tabel Sinus India menggunakan yang merupakan hasil jika keliling lingkaran adalah atau menit.

$R = 3438360 \times 6021{,}600$

Pada abad ke-5, dua fungsi lain telah didefinisikan dan digunakan. Panjang disebut kotijya (kosinus kita), dan AB disebut utkrama-jya (versi kita). Ini kadang-kadang disebut sama yang berarti 'panah', atau sagitta dalam bahasa Latin.

Fungsi versi untuk radius lingkaran adalah

$R = vers\theta = R - cos\theta$

Dalam karya Aryabhata, ia menggunakan dan mengambil nilai ini untuk menghitung tabel Sinusnya. Ini menjadi standar untuk karya-karya selanjutnya. Perbandingan dengan Sines Varhamihira (dalam jumlah sexagesimal) dan tabel Hipparchs (dalam panjang akord) menunjukkan kemungkinan transmisi setidaknya beberapa karya Yunani ke Hindu. Namun, kami tidak memiliki cara untuk mengetahui hal ini dengan pasti, dan sangat mungkin bahwa orang-orang Hindu menghitung nilainya secara independen.

$$R = 3438$$

'Pekerjaan Besar' ($Mahabhaskariya$) dari Bhaskara I ditulis sekitar tahun 600 M. Dia menghasilkan metode yang luar biasa untuk memperkirakan nilai Sinus, dengan menggunakan rasio dua fungsi kuadrat. Ini sepenuhnya didasarkan pada perbandingan hasil perhitungannya dengan nilai-nilai sebelumnya.

Namun, karena tabel ini hanya memberikan nilai untuk setiap , ada ruang yang cukup besar untuk perbaikan. Sangat mengherankan bahwa karena tabel akord Ptolemy memungkinkan dia untuk menemukan nilai yang setara dengan Sin dari hingga bahwa para sarjana India tidak melangkah lebih jauh pada tahap ini. Kemudian, Brahmagupta (598-670) menghasilkan metode yang cerdik berdasarkan perbedaan orde kedua untuk mendapatkan Sinus sudut mana pun dari himpunan awal yang hanya terdiri dari enam nilai dari dalam interval.

BAB XIV
TRIGONOMETRI DALAM PERADABAN ARAB

Pengenalan dan pengembangan trigonometri menjadi ilmu independen dalam peradaban Arab memakan waktu sekitar 400 tahun. Pada awal 770-an karya astronomi India mencapai *Khalifah Al-Mansur* di Baghdad, dan diterjemahkan sebagai *Zij al-Sindhind*, dan ini memperkenalkan metode perhitungan India ke dalam Islam (Mulyadi, 2018).

Terkenal dengan buku aljabarnya, *Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi* juga telah menulis sebuah buku tentang metode perhitungan India (*al-hisab al-hindi*) dan dia menghasilkan versi yang lebih baik dari Zij al - *Sindhind*. *Zij* versi Al-Khawarizmi menggunakan Sines dan Versi, dan mengembangkan prosedur untuk garis singgung dan kotangen untuk memecahkan masalah astronomi (Mulyadi, 2018). *Zij* Al-Khawarizmi disalin berkali-kali dan versinya digunakan untuk waktu yang lama.

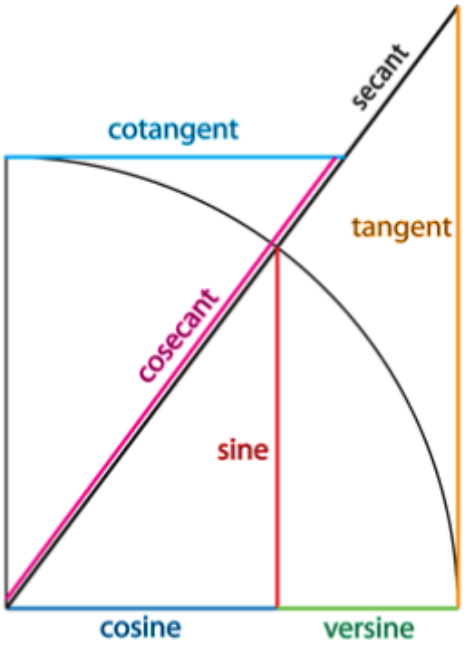
Banyak karya dalam bahasa Yunani, Sansekerta, dan Suryani dibawa oleh para sarjana ke Rumah Kebijaksanaan Al-Mansur dan diterjemahkan. Di antaranya adalah karya Euclid, Archimedes Apollonius dan tentu saja, Ptolemy. Orang-orang Arab sekarang memiliki dua versi astronomi yang bersaing, dan segera Almagest menang.

Penggunaan sinus di India dan fungsi terkaitnya lebih mudah diterapkan dalam perhitungan, dan sistem seksagesimal dari Babilonia terus digunakan, jadi selain dari dua perubahan ini, versi Arab awal Almagest tetap setia pada Ptolemy.

Abu al-Wafa al-Buzjani (Abul Wafa 940-998) memberikan kontribusi penting untuk geometri dan aritmatika dan merupakan orang pertama yang

mempelajari identitas trigonometri secara sistematis. Studi tentang identitas penting karena dengan membangun hubungan antara jumlah dan perbedaan, dan pecahan dan kelipatan sudut, perhitungan astronomi yang lebih efisien dapat dilakukan dan tabel yang lebih akurat dapat dibuat.

Sinus, versine dan cosinus telah dikembangkan dalam konteks masalah astronomi, sedangkan tangen dan kotangen dikembangkan dari studi bayangan gnomon (Van Brummelen & Byrne, 2021). Dalam *Almagestnya*, Abul Wafa menyatukan mereka dan menetapkan hubungan antara enam fungsi trigonometri dasar untuk pertama kalinya (Maigida, 2020). Dia juga menggunakan untuk jari-jari lingkaran dasar.



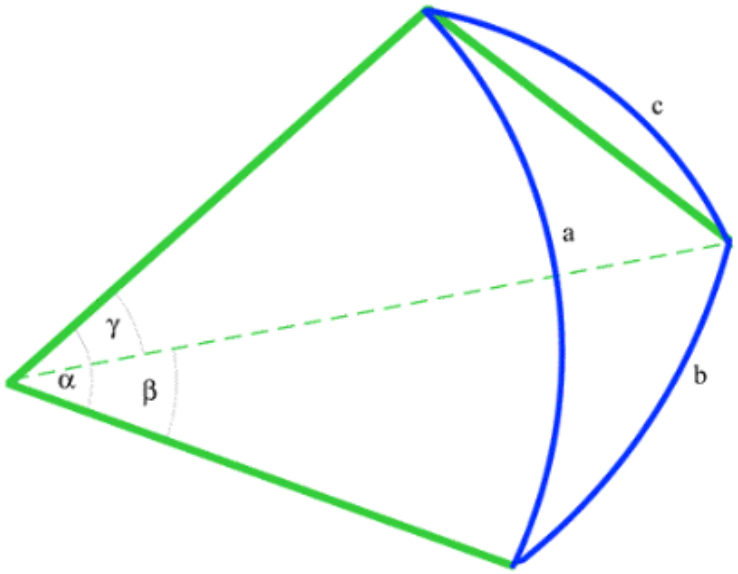
Gambar 45

Dari relasi tersebut Abul Wafa mampu menunjukkan sejumlah identitas baru dengan menggunakan fungsi-fungsi baru ini:

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \ldots cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$

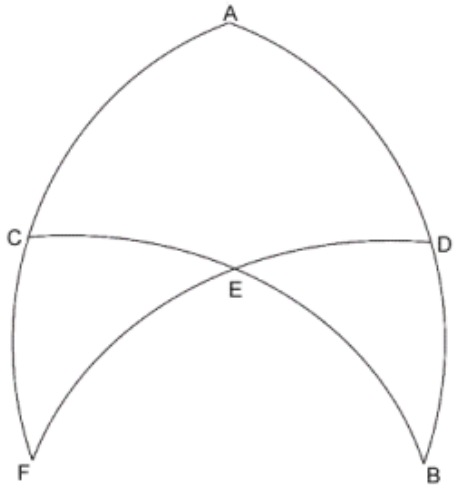
Abul Wafa juga merancang metode untuk menghitung tabel trigonometri dengan teknik pembedaan yang lebih baik untuk mendapatkan nilai yang akurat hingga tempat sexagesimal (desimal) (Maigida, 2020).

Para astronom Yunani telah lama memperkenalkan model alam semesta dengan bintang-bintang di bagian dalam bola yang luas. Mereka juga bekerja dengan segitiga bola, tetapi Abul Wafa adalah astronom Arab pertama yang mengembangkan cara mengukur jarak antar bintang menggunakan sistem fungsi trigonometrinya yang baru termasuk versine.



Gambar 46

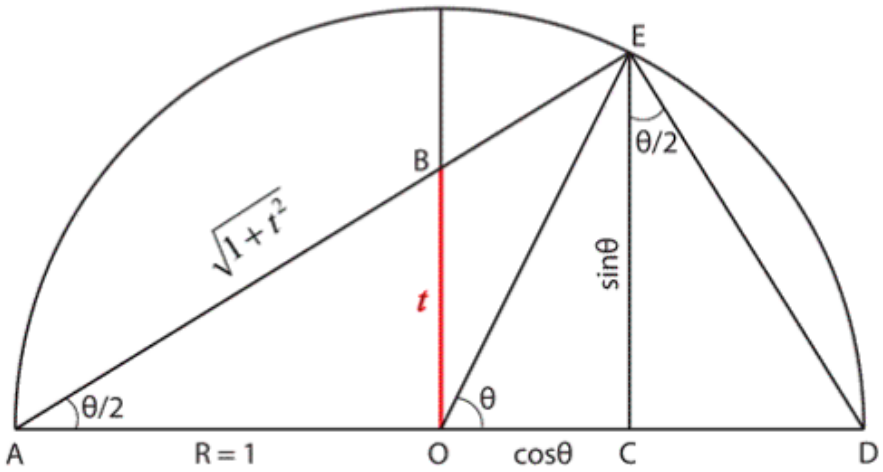
Dalam diagram di atas, segitiga biru dengan sisi a, b, c dan mewakili jarak antara bintang-bintang di bagian dalam bola. Puncak di mana tiga sudut , dan ditandai, adalah posisi pengamat. Kurva biru adalah Lingkaran Besar pada bola, dan dengan mengukur sudut, menemukan nilai yang lebih akurat untuk fungsinya, dan dengan mengasumsikan nilai jari-jari bola, menjadi mungkin untuk menemukan jarak lingkaran besar antara bintang-bintang.



Gambar 47

Aplikasi Teorema Menelaos yang cerdik menggunakan kasus khusus lingkaran besar dengan dua sudut siku-siku, Abul Wafa menunjukkan bagaimana teorema dapat diterapkan dalam segitiga bola. Ini adalah kemajuan besar dalam Trigonometri Bola yang memungkinkan perhitungan arah yang benar untuk shalat (kiblat) dan memiliki aplikasi penting dalam Navigasi dan Kartografi. Kawah Bulan Abul Wafa dinamai sebagai pengakuan atas karyanya dalam astronomi.

Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni (973-1050) adalah seorang sarjana terkemuka yang terkenal telah menulis lebih dari 100 risalah tentang astronomi, sains, matematika, geografi, sejarah, geodesi, dan filsafat. Hanya sekitar dua puluh dari karya-karya ini sekarang bertahan, dan hanya sekitar selusin ini telah diterbitkan. Risalah Al-Biruni yang berjudul Maqalid 'ilm al-hay'a (Kunci Ilmu Astronomi) mencapai lebih dari seribu halaman dan berisi perkembangan ekstensif dalam trigonometri. Di antara banyak teorema, ia menghasilkan demonstrasi rumus tangen, yang ditunjukkan di bawah ini.



Gambar 48

Dari diagram, adalah pusat setengah lingkaran, dan adalah segitiga siku-siku dengan tegak lurus dari ke $OAEDEC$

Akibatnya, segitiga dan serupa $AECEDC$

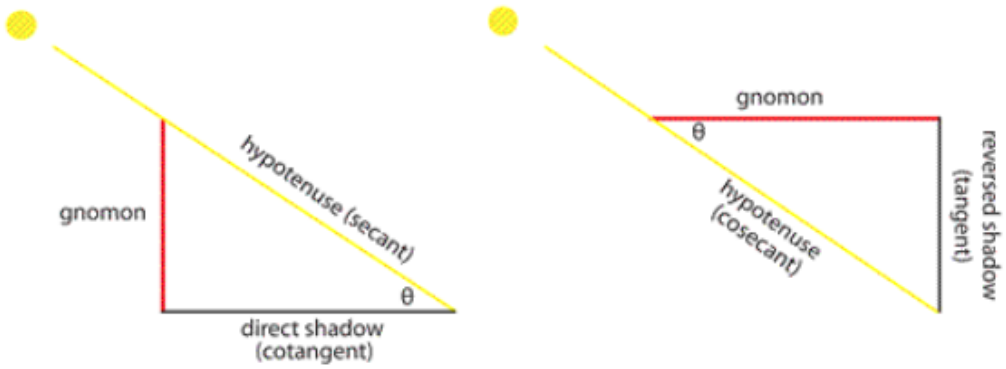
Sudut EOC Adalah dua kali sudut CED, dan sudut EAC dan CED sama besar.

Jika jari-jari lingkaran OA, maka dan $R = 1EC = sin\theta OC = cos\theta$

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{EC}{AC} = \frac{sin\theta}{1 + cos\theta} \ldots \text{dan} \ldots tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{DC}{EC} = \frac{1 - cos\theta}{sin\theta}$$

Dari mana ia memperoleh rumus setengah sudut dan beberapa sudut.

Sementara banyak aspek baru dari trigonometri yang ditemukan, akord, sinus, versine dan cosinus dikembangkan dalam penyelidikan masalah astronomi, dan dipahami sebagai sifat sudut di pusat bola surgawi. Sebaliknya, sifat tangen dan kotangen diturunkan dari pengukuran bayangan gnomon dan masalah penunjuk waktu.



Gambar 49

Dalam *Demarkation of the Coordinates of Cities* dia menggunakan segitiga bola untuk menemukan koordinat kota dan tempat lain untuk menetapkan meridian lokal (*kiblat*) dan dengan demikian menemukan arah Mekah yang benar, dan dalam *Exhaustive Treatise on Shadows* dia menunjukkan cara menggunakan gnomons untuk menemukan waktu dalam sehari.

Abu Muhammad Jabir ibn Aflah (Jabir ibn Aflah c1100 - c1160) mungkin bekerja di Seville selama bagian pertama abad ke-12. Karyanya dipandang signifikan dalam menularkan ilmu ke Eropa. Jabir ibn Aflah dianggap sebagai kritikus kuat astronomi Ptolemy. Risalahnya membantu menyebarkan trigonometri di Eropa pada abad ke-13, dan teoremanya digunakan oleh para astronom yang menyusun *Libro del Cuadrante Sennero* (Buku Kuadran Sinus) yang berpengaruh di bawah perlindungan Raja Alfonso X the Wise of Castille (1221- 1284).

Hasil dari proyek ini adalah pembuatan tabel astronomi yang jauh lebih akurat untuk menghitung posisi Matahari, Bulan dan Planet, relatif terhadap bintang-bintang tetap, yang disebut Tabel Alfonsine yang dibuat di Toledo

antara tahun 1252 dan 1270. Ini adalah tabel Columbus digunakan untuk berlayar ke Dunia Baru, dan mereka tetap meja paling akurat sampai abad ke-16.

Pada akhir abad ke-10 trigonometri menempati tempat penting dalam teks-teks astronomi dengan bab-bab tentang sinus dan akord, bayangan (singgung dan kotangen) dan rumus untuk perhitungan bola. Ada juga minat yang cukup besar dalam resolusi segitiga bidang. Tetapi jenis karya yang sama sekali baru oleh *Nasir al-Din al-Tusi* (Al-Tusi 1201-1274) berjudul *Kashf al-qina 'an asrar shakl al-qatta*(Risalah tentang Rahasia Angka Sektor), adalah pengobatan pertama trigonometri dalam dirinya sendiri, sebagai subjek yang lengkap selain Astronomi. Karya tersebut berisi diskusi sistematis tentang penerapan penalaran proporsional untuk memecahkan bidang segitiga dan bola, dan perawatan menyeluruh dari rumus untuk memecahkan segitiga dan identitas trigonometri. Al-Tusi awalnya menulis dalam bahasa Persia, tetapi kemudian menulis versi bahasa Arab. Satu-satunya versi Persia yang masih hidup dari karyanya adalah di Perpustakaan Bodleian di Oxford.

Ini adalah kumpulan dan peningkatan besar pada pengetahuan sebelumnya. Buku I, II dan IV berisi bagian dari Elemen, Almagest dan sejumlah sumber Yunani lainnya. Buku III membahas geometri dasar untuk segitiga bola dan resolusi segitiga bidang menggunakan teorema sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Buku V berisi bab-bab utama tentang trigonometri yang berhubungan dengan segitiga siku-siku dan enam hubungan mendasar yang setara dengan yang kita gunakan sekarang; sinus, cosinus, tangen, kotangen, secan, dan

cosecan. Dia memberikan banyak bukti baru dan menunjukkan bagaimana mereka dapat digunakan untuk memecahkan banyak masalah dengan lebih mudah.

Al-Tusi menemukan teknik geometris baru yang sekarang disebut 'pasangan Al-Tusi' yang menghasilkan gerak linier dari penjumlahan dua gerak melingkar. Dia menggunakan teknik ini untuk menggantikan equant yang digunakan oleh Ptolemy, dan perangkat ini kemudian digunakan oleh Copernicus dalam model heliosentris alam semesta. Al-Tusi adalah salah satu ilmuwan terbesar Islam Abad Pertengahan dan bertanggung jawab atas sekitar 150 karya mulai dari astronomi, matematika dan sains hingga filsafat dan puisi.

Al-Tusi adalah salah satu ilmuwan terbesar Islam Abad Pertengahan dan bertanggung jawab atas sekitar 150 karya mulai dari astronomi, matematika dan sains hingga filsafat dan puisi.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, A. M. 2019. *Skills in Mathematics - Trigonometry for JEE Main and Advanced*. Arihant.

Hall, H.S., Knight, S.R. 2016. *Elementary Trigonometry*. GKP.

Loney, SL. 2016. *Plane Trigonometry*. Arihant.

Maigida, A. Y. (2020). Muslims in Pioneering Modern Knowledge: Chronicles of The Freely or Unconsciously Surrendered Legacies To The West. *Nazhruna: Jurnal Pendidikan Islam*, *3*(3), 406–424. https://doi.org/10.31538/nzh.v3i3.1026

Makshud*, R. 2017. Comprehensive Trigonometry*. Mc Graw Hill Education.

McMullen, C. 2020. *Trig Identities Practice Workbook with Answers*. Zishka Publishing.

Mulyadi, A. (2018). Pemikiran Al-Khawarizmi dalam Meletakkan Dasar Pengembangan Ilmu Astronomi Islam. *International Journal Ihya' 'Ulum al-Din*, *20*(1), 63–86. https://doi.org/10.21580/ihya.20.1.2782

Neill, H. 2018. *Trigonometry: A Complete Introduction*. Teach Yourself.

Prakash, R. 2020. *Trigonometry for JEE Main and Advanced.* Arihant.

Ratti, J. S. 2020. *College Algebra and Trigonometry*. Pearson Education (US).

Tewani, G. 2021. *Trigonometry for JEE (Advanced)*. Cengage.

Van Brummelen, G., & Byrne, J. S. (2021). Maurolico, Rheticus, and the Birth of the Secant Function. *Journal for the History of Astronomy*, *52*(2), 189–211. https://doi.org/10.1177/00218286211013202.

Vasishtha. 2019. *TB Algebra & Trigonometry*. Krishna.

Trigonometri dan Beberapa Terapannya dalam Keislaman: Disertai Contoh Penggunaan Aplikasi Matematika

ORIGINALITY REPORT

11%	8%	4%	3%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	seacyber.smkn1-sby.sch.id Internet Source	<1%
2	Submitted to College of Education for Pure Sciences/IBN Al-Haitham/ Baghdad University Student Paper	<1%
3	bayanbox.ir Internet Source	<1%
4	www.cz.math.cas.cz Internet Source	<1%
5	sps.watzke.cz Internet Source	<1%
6	repository.iainambon.ac.id Internet Source	<1%
7	www.docstoc.com Internet Source	<1%
8	www.teachmint.com Internet Source	<1%
9	"抄録", 日本航空學會誌, 1938 Publication	<1%

10	www.fsr.ac.ma Internet Source	<1 %
11	Submitted to K.Zhubanov Aktobe Regional State University Student Paper	<1 %
12	dl.icdst.org Internet Source	<1 %
13	static.wikia.nocookie.net Internet Source	<1 %
14	Submitted to hac Student Paper	<1 %
15	Submitted to Western Governors University Student Paper	<1 %
16	es.scribd.com Internet Source	<1 %
17	Hyo-Sung Ahn. "Chapter 8 Formation Control via Global Orientation Alignment", Springer Science and Business Media LLC, 2020 Publication	<1 %
18	UNITEXT, 2015. Publication	<1 %
19	leeydescarga.com Internet Source	<1 %
20	deepai.org Internet Source	<1 %

21	nrich.maths.org Internet Source	<1 %
22	I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev. "A Guide Book to Mathematics", Springer Nature, 1972 Publication	<1 %
23	Submitted to (school name not available) Student Paper	<1 %
24	digitalcommons.unl.edu Internet Source	<1 %
25	www.scribd.com Internet Source	<1 %
26	eprints.walisongo.ac.id Internet Source	<1 %
27	fliphtml5.com Internet Source	<1 %
28	www.core.kochi-tech.ac.jp Internet Source	<1 %
29	Submitted to Charles University Student Paper	<1 %
30	fr.scribd.com Internet Source	<1 %
31	desiliaprimasari.blogspot.com Internet Source	<1 %
32	Submitted to Coleg Sir Gar Student Paper	<1 %

33	Handbook of Mathematics, 2015. Publication	<1 %
34	Sérgio Ferreira Cortizo. "Extensões Virtuais", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 1998 Publication	<1 %
35	A.A Trusov, V.V Vojtylov, T.Yu Zernova. "Electrooptic and conductometric effects in colloids and suspensions in sinusoidally amplitude modulated sine-shaped electric fields", Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 2002 Publication	<1 %
36	Bárbara de Holanda Maia Teixeira, Edmundo Capelas de Oliveira. "Mastering Calculus through Practice", Springer Science and Business Media LLC, 2021 Publication	<1 %
37	Monk, Paul, Munro, Lindsey. "Maths for Chemistry", Maths for Chemistry, 2021 Publication	<1 %
38	www.riverinstitute.ca Internet Source	<1 %
39	Ulrich L. Rohde, G. C. Jain, Ajay K. Poddar, A. K. Ghosh. "Introduction to Differential Calculus", Wiley, 2011 Publication	<1 %

40	www.math15.com Internet Source	<1 %
41	singhaniauniversity.co.in Internet Source	<1 %
42	www.math.wisc.edu Internet Source	<1 %
43	www.pagalguy.com Internet Source	<1 %
44	Submitted to University of Surrey Student Paper	<1 %
45	Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Volume 85, Issue 3 (2014-09-16) Publication	<1 %
46	anzdoc.com Internet Source	<1 %
47	charles.karney.info Internet Source	<1 %
48	dspace.trakya.edu.tr:8080 Internet Source	<1 %
49	pdfcoffee.com Internet Source	<1 %
50	www.slideshare.net Internet Source	<1 %
51	Submitted to Sriwijaya University Student Paper	<1 %
	aeroespacial.org.br	

52	Internet Source	<1 %
53	wmif.org Internet Source	<1 %
54	150.19.250.13 Internet Source	<1 %
55	Submitted to Academic Library Consortium Student Paper	<1 %
56	F. Z. Chaoui. "An input-output approach to achieve adaptive tracking for saturating stable systems", International Journal of Control, 2001 Publication	<1 %
57	Submitted to Nanyang Technological University, Singapore Student Paper	<1 %
58	samacheerkalvi.co.in Internet Source	<1 %
59	Submitted to University of Leeds Student Paper	<1 %
60	Submitted to West University Of Timisoara Student Paper	<1 %
61	dokumen.pub Internet Source	<1 %
62	info.tetonscience.org Internet Source	<1 %

63	katibstock.com Internet Source	<1 %
64	tamop412a.ttk.pte.hu Internet Source	<1 %
65	tech.groups.yahoo.com Internet Source	<1 %
66	"CHAPTER 7", Elsevier BV, 2014 Publication	<1 %
67	jics.tbcc.cc.or.us Internet Source	<1 %
68	www.xhedu.org Internet Source	<1 %
69	Submitted to Wigan and Leigh College, Greater Manchester Student Paper	<1 %
70	math.uci.edu Internet Source	<1 %
71	Andrea Della Vecchia, Paolo Ferrazzoli, Leila Guerriero. "Modelling microwave scattering from long curved leaves", Waves in Random Media, 2004 Publication	<1 %
72	Steiner, Erich. "The Chemistry Maths Book", The Chemistry Maths Book, 2008 Publication	<1 %
73	Submitted to Universitas Sultan Ageng Tirtayasa	<1 %

Student Paper

74	V.I. SMIRNOV. "FUNCTIONAL RELATIONSHIPS AND THE THEORY OF LIMITS", Elsevier BV, 1964 Publication	<1 %
75	www.saiensu.co.jp Internet Source	<1 %
76	"Useful Mathematical Quantities, Functions, and Formulas", Elsevier BV, 2017 Publication	<1 %
77	livrosdeamor.com.br Internet Source	<1 %
78	pointgrey.vsb.bc.ca Internet Source	<1 %
79	www.escet.urjc.es Internet Source	<1 %
80	Submitted to Universitas Negeri Jakarta Student Paper	<1 %
81	Submitted to Universitas Negeri Surabaya The State University of Surabaya Student Paper	<1 %
82	abekobe.cocolog-nifty.com Internet Source	<1 %
83	www.dgshipping.com Internet Source	<1 %
84	www.gnb.ca Internet Source	<1 %

85	www.pwschool.ac.th Internet Source	<1 %
86	www.sgo.cz Internet Source	<1 %
87	Submitted to University of Nottingham Student Paper	<1 %
88	Submitted to University of Salford Student Paper	<1 %
89	Submitted to University of Stellenbosch, South Africa Student Paper	<1 %
90	kupdf.net Internet Source	<1 %
91	oky-pranata.blogspot.com Internet Source	<1 %
92	studentxpress.ie Internet Source	<1 %
93	titus.phy.qub.ac.uk Internet Source	<1 %
94	www.aianjack.org Internet Source	<1 %
95	www.bseu.by Internet Source	<1 %
96	www.ocr.org.uk Internet Source	<1 %
	Submitted to Cranfield University	

97	Student Paper	<1 %
98	Submitted to New York Institute of Technology Student Paper	<1 %
99	Submitted to University College London Student Paper	<1 %
100	Submitted to University of Newcastle upon Tyne Student Paper	<1 %
101	ar.scribd.com Internet Source	<1 %
102	bcl.sci.yamaguchi-u.ac.jp Internet Source	<1 %
103	docplayer.info Internet Source	<1 %
104	ferrantetutoring.com Internet Source	<1 %
105	quod.lib.umich.edu Internet Source	<1 %
106	www.12000.org Internet Source	<1 %
107	www.grahamkendall.net Internet Source	<1 %
108	www.im.ps.pl Internet Source	<1 %

109	www.knjiznica.fpp.edu Internet Source	<1 %
110	www.seewww.cn Internet Source	<1 %
111	www.win.tue.nl Internet Source	<1 %
112	zims-en.kiwix.campusafrica.gos.orange.com Internet Source	<1 %
113	G.N. BERMAN. "FUNCTIONS", Elsevier BV, 1965 Publication	<1 %
114	K.D. Kumar, K. Kumar. "Line-of-sight-pointing for satellites in high altitude inclined elliptic orbits", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005 Publication	<1 %
115	Submitted to University of Melbourne Student Paper	<1 %
116	answers.yahoo.com Internet Source	<1 %
117	dedimulya.files.wordpress.com Internet Source	<1 %
118	facstaff.cbu.edu Internet Source	<1 %
119	infourok.ru Internet Source	<1 %

120	kanuay.com Internet Source	<1 %
121	mac0916.ms.unimelb.edu.au Internet Source	<1 %
122	mathcyber1997.com Internet Source	<1 %
123	mfsacedon.weebly.com Internet Source	<1 %
124	photocdn.sohu.com Internet Source	<1 %
125	repository.uinmataram.ac.id Internet Source	<1 %
126	tetcoaching.net Internet Source	<1 %
127	vseosvita.ua Internet Source	<1 %
128	vsip.info Internet Source	<1 %
129	www.aw-bc.com Internet Source	<1 %
130	www.kenn.cr.k12.ia.us Internet Source	<1 %
131	www.ksvs.khc.edu.tw Internet Source	<1 %
132	www.smknperkapalan.net Internet Source	<1 %

133	www.usuarios.iponet.es Internet Source	<1 %
134	Golden, Steven. "Messung der Absorption atmosphärischer ELF-Impulse", Publikationsserver der Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2005. Publication	<1 %
135	Sadiku, Matthew. "Elements of Electromagnetics", Oxford University Press Publication	<1 %
136	"103 Trigonometry Problems", Springer Science and Business Media LLC, 2005 Publication	<1 %
137	"Chapter 11 The Stokes boundary-value problem with ellipsoidal corrections in boundary condition", Springer Science and Business Media LLC, 1998 Publication	<1 %
138	"Encyclopaedia of Mathematics", Springer Science and Business Media LLC, 1990 Publication	<1 %
139	Claudio Canuto, Anita Tabacco. "Mathematical Analysis I", Springer Science and Business Media LLC, 2015 Publication	<1 %
140	David Lizarraga. "Chained form approximation of a driftless system. Application to the exponential stabilization	<1 %

of the general N-trailer system", International Journal of Control, 2001
Publication

141	Harley Flanders, Justin J. Price. "IDENTITIES AND INVERSE FUNCTIONS", Elsevier BV, 1975 Publication	<1 %
142	Lathi, B.P.. "Modern Digital and Analog Communications Systems", Oxford University Press Publication	<1 %
143	www.exo7.emath.fr Internet Source	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 4 words
Exclude bibliography	On		