

Abdillah - Ridhwan Latuapo - Ajeng Gelora Mastuti - Nurlaila Sehuwaky

# EKSPLORASI KEISLAMAMAN

MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA



PENERBIT  
LP2M  
IAIN AMBON

DITERBITKAN OLEH:  
LP2M IAIN AMBON 2019

# **Eksplorasi Keislaman melalui Pembelajaran Matematika**

Abdillah  
Ridhwan Latuapo  
Ajeng Gelora  
MastutiNurlaila Sehuwaky

LP2M IAIN AMBON

# **Eksplorasi Keislaman melalui Pembelajaran Matematika**

Abdillah  
Ridhwan Latuapo  
Ajeng Gelora  
MastutiNurlaila Sehuwaky

ISBN: 978-602-5501-85-2

Editor: Dinar Riaddin  
Penyunting: Tim LP2M IAIN Ambon  
Desain Sampul dan Tata Letak: Bojan Bunglon

Diterbitkan oleh:  
**LP2M IAIN Ambon**  
Jl. H. Tarmidzi Taher Kebun Cengkeh Batumerah Atas  
Ambon 97128  
Telp. (0911) 344816  
Handpone 081311111529  
Faks. (0911) 344315  
e-mail: [lp2m@iainambon.ac.id](mailto:lp2m@iainambon.ac.id)  
[www.lp2miainambon.id](http://www.lp2miainambon.id)

Cetakan Pertama, November, 2019

Hak cipta yang dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk  
dan dengan cara apapun tanpa ijin tertulis dari penerbit

## Daftar Isi

|   |            |
|---|------------|
| <b>BAB I. Eksplorasi dan Pendekatan Studi Islam .....</b>             | <b>2</b>   |
| a. Eksplorasi .....   | 2          |
| b. Pendekatan Studi Islam .....                                       | 6          |
| <b>BAB II. Hakikat Pembelajaran Matematika .....</b>                  | <b>13</b>  |
| a. Pengertian Belajar dan Pembelajaran .....                          | 13         |
| b. Pembelajaran Matematika .....                                      | 14         |
| <b>BAB III. Objek Kajian Islam .....</b>                              | <b>19</b>  |
| a. Al-Qur'an .....  | 19         |
| b. Hadist .....   | 25         |
| <b>BAB IV. Integrasi Matematika dan Islam .....</b>                   | <b>26</b>  |
| <b>BAB V. Eksplorasi Materi Bilangan .....</b>                        | <b>31</b>  |
| <b>BAB VI. Matematika &amp; Islam .....</b>                           | <b>41</b>  |
| a. Matematika sebagai Ilmu Keislaman ( <i>Islamic Science</i> ) ..... | 41         |
| b. Kegunaan Matematika .....  | 45         |
| c. Matematika dalam Sejarah Islam .....                               | 47         |
| d. Beberapa Prinsip Matematika .....                                  | 50         |
| <b>BAB VII. Himpunan .....</b>  | <b>53</b>  |
| <b>BAB VIII. Aksiomatika .....</b>                                    | <b>69</b>  |
| <b>BAB IX. Logika .....</b>   | <b>83</b>  |
| <b>Daftar Pustaka .....</b>   | <b>125</b> |

## BAB I. Eksplorasi dan Pendekatan Studi Islam

### a. Eksplorasi

Eksplorasi merupakan sebuah kata yang mengandung makna menemukan, mencari atau menginvestigasi secara bebas. Kata eksplorasi sering digunakan pada bidang geologi. Ahli geologi dalam menginvestigasi tempat dimana sumber daya alam berada biasanya dikatakan sedang melakukan eksplorasi.

Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) istilah eksplorasi lebih banyak diartikan sebagai sebuah kegiatan penyelidikan atau penjelajahan lapangan dengan tujuan memperoleh pengetahuan yang lebih banyak. Sehingga eksplorasi memiliki kaitan dengan suatu proses penjelajahan, penyelidikan atau penemuan sumber-sumber alam yang terdapat di suatu tempat. Tentunya, sebelum melakukan proses penyelidikan atau penemuan tersebut, telah tersedia data-data awal yang digunakan sebagai titik tolak menemukan sesuatu hal atau ide yang baru yang dicari.

Eksplorasi hampir serupa dengan investigasi. Greenes (Diezmann, 2001:2) (Diezman, 2001) mengemukakan bahwa *“Investigations present curiosity provoking situations, problems, and questions that are intriguing and captivate students’ interest and attention. At the outset, students are unable to solve the problem because they are complex, often necessitating the design of a plan or approach, and frequently require the completion of several tasks. Most investigations are interdisciplinary, requiring students to apply concepts from*

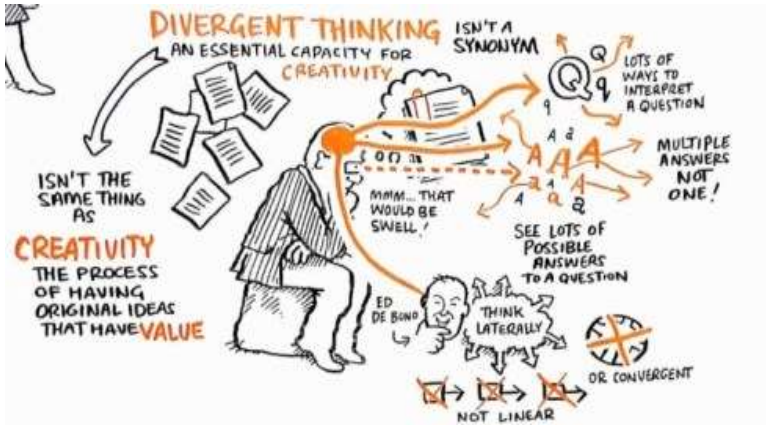
*the various areas of mathematics, and, for some problems, from other disciplines as well ... Generally, there is more than one way to approach or solve each problem. Identifying different solution paths and evaluating them is often part of the solution process. Because of multiple tasks, investigations are often designed to be tackled by students working in pairs or teams and for long periods of time”.*

Pernyataan di atas menunjukkan bahwa antara eksplorasi dan investigasi memiliki kesamaan tujuan, yakni untuk mendapatkan suatu jawaban, pola atau hubungan konsep. Sedangkan keduanya berbeda pada sifat kegiatannya. Eksplorasi merupakan kegiatan coba-coba untuk menemukan jawaban, pola atau hubungan suatu konsep. Artinya, outputnya belum bisa diketahui apakah terdapat jawaban, pola atau hubungan suatu konsep atau tidak. Sedangkan investigasi adalah kegiatan mencari data akan sesuatu yang sudah ada. Pada investigasi, jawaban, pola atau hubungan tersebut sudah pasti keberadaannya, namun belum ditemukan. Kegiatan eksplorasi dapat dilakukan secara individu maupun kelompok. Melalui eksplorasi seseorang terdorong untuk mengamati berbagai gejala, menangkap tanda-tanda yang membedakan dengan gejala pada peristiwa lain, atau mengamati objek di lapangan.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka eksplorasi yang dimaksudkan dalam buku ini ialah suatu strategi untuk mengungkap jawaban, pola atau hubungan beberapa konsep melalui kegiatan penemuan, penelusuran, dan juga penyelidikan. Berkenaan dengan tema yang dieksplorasi dalam buku ini yakni, penulis melakukan penelusuran dan

penyelidikan tentang konten ilmu matematika yang berhubungan atau berintegrasi dengan ajaran-ajaran islam baik yang terkandung dalam Al-qur'an maupun hadist.

Dalam proses eksplorasi terdapat dua tipe berpikir yang digunakan, yakni berpikir divergen (berpikir kreatif) dan berpikir konvergen (kritis). Haryanto (2006) mengemukakan bahwa sesuai dengan fungsi dan kerja belahan otak kanan, berpikir secara divergen adalah cenderung lateral, tidak rasional, lebih banyak berurusan dengan gambaran intuisi yang menyatukan berbagai ide terpisah ke dalam satuan ide baru yang utuh. Berpikir divergen mampu menangkap obyek secara keseluruhan dengan baik, tetapi kurang mampu menangkap detail obyek bersangirutan. Orang yang memiliki pola berpikir divergen cenderung menyukai ketidakpastian, senang bergulat dengan ilmu-ilmu yang sukar dipahami melalui logika, tertarik pada pernyataan/pertanyaan yang memiliki banyak jawaban, peka terhadap sentuhan rasa dan gerak, serta lebih menyukai kiasan dan ungkapan. Dalam memberikan penjelasan pemikir divergen sering menggunakan gambar dan atau gerak tertentu. Orang dengan kecenderungan cara berpikir divergen lebih mudah mengingat wajah dari pada nama, banyak bekerja dengan imajinasi, menghadapi sesuatu (masalah) dengan santai, menyukai kebebasan dan senang berimprovisasi.



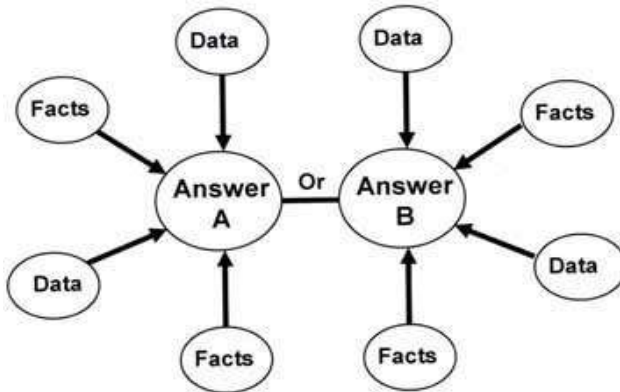
Gambar 1. Pola Berpikir Divergen

Pola berpikir ditunjukkan dengan kemampuan dalam memberikan pilihan ide atau solusi. Umumnya ide-ide atau solusi-solusi yang dihasilkan melalui aktivitas berpikir divergen mengalir begitu saja secara spontan. Dalam buku ini penulis melakukan analisis terhadap prinsip dan konsep dalam ilmu matematika serta melakukan kajian terhadap ajaran islam yang terkandung dalam Al-qur'an dan hadis. Hasil analisis dan kajian tersebut selanjutnya diselidiki keterkaitan yang dapat diintegrasikan.

Pola berpikir yang kedua, yakni berpikir konvergen. Pada pola pemikir konvergen, teknik penyelesaian masalah yang dilakukan adalah dengan menyatukan ide atau konsep berbeda untuk menemukan satu solusi. Kecenderungan dari pola pemikir ini adalah berpikir dengan cepat, selalu menggunakan logika dan akurasi, cermat dalam mengidentifikasi fakta, menerapkan kembali teknik yang sudah ada, serta mengumpulkan informasi. Kecenderungan



pola berpikir ini adalah hanya ada satu jawaban yang benar. Orang-orang dengan pola berpikir tipe ini memiliki alur berpikir logis, pintar menghafal pola, menyelesaikan masalah dan mengerjakan tes ilmu pengetahuan.



Gambar 2. Pola Berpikir Konvergen

Proses berpikir untuk melakukan eksplorasi membutuhkan keduanya (divergen-konvergen). Fungsi divergen diperlukan untuk dapat menghasilkan kemungkinan jawaban yang sebanyak-banyaknya sehingga perlu menerobos ke berbagai dimensi dan lintas sektoral, sementara pemikiran konvergen diperlukan untuk memberikan penilaian secara kritis anillitis terhadap hasil pemikiran divergen sehingga dicapai kebenarannya.

### **b. Pendekatan Studi Islam**

Pendekatan studi islam adalah suatu pendekatan yang berkaitan dengan kajian keislaman atau ajaran-ajaran islam. ...

Pendekatan studi islam terbagi menjadi beberapa macam yakni, pendekatan teologis normatif, pendekatan antropologis, pendekatan sosiologis, pendekatan filosofis, pendekatan historis, dan pendekatan psikologi

Ketujuh pendekatan dalam studi islam tersebut di atas dijelaskan sebagai berikut

#### 1. Pendekatan Teologis Normatif

Secara istilah pendekatan teologi normatif merupakan pendekatan dalam memahami agama islam melalui kerangka ilmu ketuhanan yang berdasar pada keyakinan akan kebenaran agama yang dianut seseorang (Nata, 2006). Pengertian teologi dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah pengetahuan ketuhanan (mengenai sifat Allah, dasar kepercayaan kepada Allah dan agama, terutama berdasarkan pada kitab suci). Ukuran yang digunakan dalam pendekatan ini adalah nilai-nilai keimanan terhadap Allah SWT. Diantaranya adalah keimanan tentang keesaan Allah, kemahakuasaan-Nya, keagungan-Nya serta meyakini akan kebenaran agama ini bahwa agama yang diridhoi oleh Allah adalah agama islam. Sebagaimana firman Allah QS. Ali-Imran ayat 19: “Sesungguhnya agama di sisi Allah hanyalah Islam... “.

Dalam tulisan ini pendekatan teologis normatif yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam islam melalui nilai-nilai ketuhanan yang berdasarkan pada keyakinan akan kebenaran agama yang dianut seseorang.

#### 2. Pendekatan Antropologis

Pendekatan antropologis adalah pendekatan dalam memahami agama melalui implementasi praktik keagamaan yang tumbuh dan berkembang dalam masyarakat (Anwar, 2009). Antropologi merupakan suatu bidang ilmu yang mempelajari tentang manusia baik dari segi, perilaku, budaya, keanekaragaman dan lain sebagainya. Istilah antropologi berasal dari bahasa Yunani, yakni *anthropos* yang berarti manusia dan *logos* yang berarti cerita atau kata.

Pendekatan antropologis dalam studi islam dapat memudahkan pemahaman tentang keagamaan. Sebab, seseorang secara langsung dapat melihat sisi-sisi keagamaan dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga tampak secara jelas bahwa agama memiliki hubungan dengan berbagai masalah dalam kehidupan manusia.

Tidak dapat dipungkiri bahwa agama tanpa pengaruh budaya tidak akan dapat berkembang meluas ke seluruh manusia. Sebab penyebaran agama sangat terkait dengan usaha penganutnya untuk menyebarkan ke seluruh wilayah. Misalnya upaya yang dilakukan para sahabat Nabi untuk menerjemahkan dan mengkonstruksi agama ke dalam suatu kerangka sistem agar dengan mudah dapat pahami oleh manusia. Ilmu fiqih, ilmu hadist, ilmu tafsir dan ilmu ushul fiqih merupakan hasil konstruksi dalam menerjemahkan ajaran islam sesuai dengan kebutuhan manusia. Dalam tulisan ini pendekatan antropologis yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam

islam melalui praktik keagamaan yang tumbuh dan berkembang dalam masyarakat.

### 3. Pendekatan sosiologis

Pendekatan sosiologi adalah pendekatan dalam memahami agama melalui nilai-nilai kebersamaan dalam masyarakat. Shadily (1989) mengemukakan bahwa sosiologi adalah suatu ilmu yang menggambarkan keadaan masyarakat lengkap dengan struktur, lapisan serta berbagai gejala sosial lainnya yang saling berkaitan. Dengan ilmu ini, suatu fenomena sosial dapat dianalisis dengan faktor-faktor yang mendorong terjadinya hubungan, mobilitas sosial, serta keyakinan-keyakinan yang mendasari terjadinya proses tersebut.

Sosiologi menjadi salah satu dari pendekatan dalam memahami agama, sebab banyak bidang kajian keagamaan yang dapat dipahami secara proporsional dan tepat apabila dikaitkan dengan ilmu sosiologi. Dalam teori sosiologi, masyarakat sebagai organisme ekologi selalu mengalami pertumbuhan dan perkembangan. Semakin besar pertumbuhan yang terjadi menyebabkan masalah-masalah yang dihadapi semakin kompleks. Olehnya itu, agama merupakan kebutuhan dalam kehidupan sosial sebagai pembatas atau peraturan guna menghadapi masalah-masalah yang terjadi. Agama tidak dapat dipisahkan dari kehidupan sosial. Agama merupakan nasihat, nasihat bagi manusia baik secara individu, masyarakat, bangsa dan Negara. Setiap problematika sosial pasti memiliki pedoman yang telah ditetapkan oleh agama.

Dalam tulisan ini pendekatan sosiologis yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam islam melalui nilai-nilai kebersamaan dalam masyarakat.

#### 4. Pendekatan filosofis

Filosofis diambil dari kata filsafat yang berasal dari kata *phio* artinya cinta kepada kebenaran, ilmu dan hikmah. Secara istilah filsafat dapat bermakna mencari hakikat sesuatu, berusaha mengaitkan sebab dan akibat serta menafsirkan pengalaman-pengalaman manusia.

Pendekatan filosofis adalah pendekatan dalam memahami agama melalui makna dari inti, hakikat atau hikmah mengenai sesuatu yang berada di balik objek formalnya. Artinya, dalam hal implementasi ajaran agama yang dilakukan tidak hanya bersifat formalistik atau lahiriah semata yang tidak memiliki makna apa-apa, kosong tanpa arti, melainkan juga melibatkan aspek batin.

Pendekatan filosofis dalam memahami agama melibatkan proses berpikir rasional. Berpikir rasional digunakan untuk menunjukkan fakta bahwa akal memiliki peran yang mendasar dalam internalisasi pengalaman dan keyakinan keagamaan. Selain itu, berpikir rasional untuk menunjukkan bahwa dalam membuktikan keimanan harus didasarkan pada argument-argumen logis yang dapat dibenarkan. Dalam tulisan ini pendekatan filosofis yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam

islam melalui makna dari inti, hakikat atau hikmah mengenai sesuatu yang berada di balik objek formalnya .

#### 5. Pendekatan historis

Historis atau sejarah merupakan kejadian-kejadian yang telah terjadi pada masa lalu pada kehidupan manusia yang ditentukan berdasarkan peninggalan-peninggalan berbagai peristiwa. Dalam perspektif keilmuan, sejarah adalah ilmu yang membahas tentang berbagai peristiwa lampau yang disusun berdasarkan unsur tempat, waktu, objek, latar belakang dan perilaku dari peristiwa tersebut.

Pendekatan sejarah berarti pendekatan dalam memahami agama melalui kejadian-kejadian pada masa lampau. Pendekatan ini sangat tepat digunakan karena agama sendiri lahir dalam situasi yang konkrit dan berkaitan dengan kondisi sosial masyarakat. Kuntowijoyo (Anwar, 2009) mengemukakan pengalamannya ketika mendalami agama islam melalui pendekatan sejarah bahwa setelah mempelajari Al-qur'an ia menarik kesimpulan tentang kandungan isi Al-qur'an. Menurutnya, kandungan isi Al-qur'an terbagi menjadi dua bagian, yakni bagian pertama, berisi konsep-konsep dan kedua berisi kisah-kisah sejarah dan perumpamaan. Dalam tulisan ini pendekatan histori yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam islam melalui kejadian-kejadian pada masa lalu.

#### 6. Pendekatan psikologi

Pendekatan psikologi berarti pendekatan dalam memahami agama melalui aspek perilaku dan kejiwaan. Rasulullah menganjurkan agar dalam proses pendidikan baik pembelajaran, pembinaan, bimbingan dan pengembangan potensi manusia harus disesuaikan dengan kapasitas kemampuan peserta didik. Psikologi orang dewasa berbeda dengan anak-anak. Sehingga dalam memberikan pendidikan harus dibedakan pula. Karakteristika anak-anak lebih senang belajar sambil bermain atau bergurau. Pada usia mereka, kesadaran akan pentingnya pendidikan belum muncul pada pemikiran mereka, sehingga upaya yang dilakukan adalah terlebih dahulu membangun kesadaran. Dalam tulisan ini pendekatan psikologi yang dimaksudkan adalah pendekatan untuk mendapatkan data dan informasi tentang eksplorasi materi matematika dalam islam melalui aspek perilaku dan kejiwaan manusia.

## BAB II. Hakikat Pembelajaran Matematika

### a. Pengertian Belajar dan Pembelajaran

Pengetahuan dapat diperoleh melalui suatu usaha yang disebut dengan belajar. Melalui belajar seseorang dapat meningkatkan wawasan keilmuan dan pemahamannya. Muhibbin (2013) mengemukakan bahwa belajar adalah kegiatan yang berproses dan menjadi unsur yang sangat fundamental dalam penyelenggaraan setiap jenis dan jenjang pendidikan. keberhasilan pencapaian tujuan pendidikan sangat tergantung pada proses belajar yang dilalui oleh siswa, kapan dan dimanapun berada. Hal yang sama dikemukakan oleh Sardiman (2012) bahwa belajar merupakan serangkaian kegiatan jiwa raga, psiko-fisik dalam rangka menuju perkembangan pribadi manusia yang seutuhnya, menyangkut unsur cipta, rasa dan karsa pada ranah kognitif, afektif dan psikomotor.

Definisi yang berbeda dikemukakan oleh Morgan (Suprijono, 2012) menyatakan *“learning is anyrelatively permanent change in behavior that is a result of past experience”* yang berarti bahwa belajar adalah perubahan perilaku yang bersifat permanen sebagai hasil dari pengalaman.

Pembelajaran berasal dari kata dasar belajar, yakni seperangkat kegiatan yang dirancang untuk membentuk terjadinya proses belajar. Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia, pembelajaran diartikan sebagai proses/cara menjadikan orang atau makhluk hidup untuk belajar. Pembelajaran pada hakikatnya adalah suatu proses, yaitu proses mengatur, mengorganisasi lingkungan yang ada di



sekitar peserta didik sehingga dapat menumbuhkan dan mendorong peserta didik melakukan proses belajar. Pembelajaran juga dikatakan sebagai proses memberikan bimbingan atau bantuan kepada peserta didik dalam melakukan proses belajar. Hal ini sebagaimana yang tercantum dalam Undang-undang Republik Indonesia Nomor 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional, bahwa pembelajaran adalah proses interaksi pendidik dengan peserta didik dan sumber belajar yang berlangsung dalam suatu lingkungan belajar.

Proses pembelajaran ditandai dengan adanya interaksi edukatif yang terjadi, yaitu interaksi yang sadar akan tujuan. Interaksi ini berakar dari pihak pendidik (guru) dan kegiatan belajar secara paedagogis pada diri peserta didik, berproses secara sistematis melalui tahap rancangan, pelaksanaan, dan evaluasi. Pembelajaran tidak terjadi seketika, melainkan berproses melalui tahapan-tahapan tertentu. Dalam pembelajaran, pendidik memfasilitasi peserta didik agar dapat belajar dengan baik. Dengan adanya interaksi tersebut maka akan menghasilkan proses pembelajaran yang efektif sebagaimana yang telah diharapkan (hanafi, 2014)

### **b. Pembelajaran Matematika**

Matematika sebagai salah satu bidang ilmu banyak diperlukan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya kebutuhan dalam melakukan perhitungan ketika menakar barang belanjaan, menghitung jumlah atau harga barang belanjaan, menunjukkan jumlah suatu benda atau objek dan lainnya.

Olehnya itu pengetahuan dan pemahaman tentang masalah matematika harus dimiliki oleh setiap orang.

Secara etimologi matematika berasal dari bahasa Yunani yang terdiri dari satu suku kata, yakni "*mathein*" atau "*manthenen*" yang berarti "mempelajari". Namun, terdapat dugaan lain bahwa matematika memiliki hubungan dengan sebuah kata dari bahasa Sanskerta, yakni "*medha*" atau "*widya*" (Muhlisarini, 2014).

Dikatakan bahwa secara terminologi, hingga saat ini, matematika belum memiliki arti yang tetap dan cukup banyak. Hal ini dikarenakan matematika sebagai induk dari ilmu pengetahuan memiliki banyak fungsi dan peranan dalam bidang studi lainnya. Sehingga keberadaan definisi yang dibuat oleh beberapa ahli merupakan definisi yang dibuat berdasarkan sudut pandang ahli yang menggunakan di bidang tersebut. Diantaranya mendefinisikan matematika berdasarkan struktur matematika, pola pikir, peranan dan manfaatnya di bidang lain dan sebagainya. Karso, dkk (2011) mengemukakan beberapa definisi yang telah dibuat oleh beberapa ahli antara lain sebagai berikut:

- a. Matematika adalah cabang pengetahuan eksak dan terorganisasi.
- b. Matematika adalah ilmu tentang keluasan atau pengukuran dan letak.
- c. Matematika adalah ilmu tentang bilangan-bilangan dan hubungan-hubungannya.
- d. Matematika berkenaan dengan ide-ide, struktur-struktur dan hubungan-hubungannya yang diatur menurut urutan yang logis.

- e. Matematika adalah ilmu deduktif yang tidak menerima generalisasi yang didasarkan pada observasi (induktif) tetapi diterima generalisasi yang didasarkan pada pembuktian secara deduktif.
- f. Matematika adalah ilmu tentang struktur yang terorganisasi mulai dari unsur yang tidak didefinisikan ke unsur yang didefinisikan, ke aksioma atau postulat akhirnya ke dalil atau teorema.
- g. Matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan besaran, dan konsep-konsep hubungan lainnya yang jumlahnya banyak dan terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri.

Pada Lampiran I Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 menyatakan bahwa mata pelajaran matematika perlu diberikan pada semua peserta didik mulai dari sekolah dasar untuk membekali peserta dengan kemampuan logis, analitis, sistematis, kritis dan kreatif serta kemampuan bekerjasama. Abdillah dkk (2018) mendefinisikan bahwa belajar matematika sejatinya adalah belajar tentang ide-ide (gagasan-gagasan), penalaran, struktur dan konsep-konsep yang sifatnya abstrak.

Penguasaan matematika melalui pembelajaran matematika sekolah menengah pertama menurut Depdiknas (Wardhani, 2008) memiliki tujuan:

1. memahami konsep matematika,
2. mengembangkan penalaran matematis,
3. mengembangkan kemampuan memecahkan masalah,
4. mengembangkan kemampuan komunikasi matematis dan
5. mengembangkan sikap menghargai matematika.



Tujuan pembelajaran matematika ini dalam Kurikulum 2013 terangkum dalam 4 (empat) Kompetensi Inti yaitu Kompetensi Sikap Spritual, Kompetensi Sikap Sosial, Kompetensi Pengetahuan dan Kompetensi Keterampilan. Kompetensi sikap spritual dalam pembelajaran matematika dikembangkan melalui kompetensi dasar menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.

The Partnership for 21<sup>st</sup> Century Skills (2007) menyatakan bahwa bagian terpenting dari system pendukung bagi bertumbuhnya kompetensi masa depan adalah kurikulum yang selanjutnya dioperasionalkan dalam kegiatan pembelajaran, termasuk pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika sudah seharusnya tidak hanya dimaksudkan untuk penguasaan materi matematika semata, melainkan untuk mencapai tujuan yang lebih tinggi yakni penguasaan terhadap ketrampilan matematika yang diperlukan untuk memahami dunia dan sekitarnya serta untuk keberhasilan dalam kehidupan. Ketrampilan tersebut dapat berkembang dengan baik jika daya nalar, kepribadian dan sikap yang baik dapat terbentuk melalui pembelajaran matematika.

Turmudi (2008) mengemukakan bahwa “pembelajaran matematika selama ini disampaikan kepada siswa secara informatif, artinya siswa hanya memperoleh informasi dari guru saja sehingga derajat kemelekatannya juga dapat dikatakan rendah”. Pembelajaran seperti ini dikhawatirkan memberikan hasil yang tidak optimal sebab siswa sebagai subjek kurang dilibatkan dalam menemukan konsep-konsep pelajaran yang harus dikuasainya. Konsep-konsep yang

diberikan tidak membekas tajam dalam ingatan siswa sehingga siswa mudah lupa dan sering kebingungan dalam memecahkan suatu permasalahan yang berbeda dari yang pernah dicontohkan oleh gurunya.



### BAB III. Objek Kajian Islam

Dalam tulisan ini objek kajian islam yang dieksplorasikan berkaitan dengan masalah-masalah yang terkandung dalam sumber hukum islam *pertama* dan *kedua*, yaitu Al-Qur'an dan Hadist serta nilai-nilai ajaran islam yakni, aqidah, akhlaq, syariah dan fiqh.

#### a. Al-Qur'an

Islam merupakan agama yang diturunkan Allah SWT. kepada Nabi Muhammad SAW melalui perantara malaikat Jibril a.s. Nabi Muhammad SAW adalah suri teladan yang nyata bagi manusia dalam menjalankan nilai-nilai islam yang perintahkan oleh Allah SWT. Ajaran islam tentang perintah-perintah dan larangan-larangan Allah SWT. berupa firman-Nya, telah tercantum dalam kitab suci Al-qur'an. Oleh karena itu, seluruh umat islam harus menjadikan Al-qur'an sebagai sumber rujukan utama dan pertama dalam menjalankan kehidupannya.

Anshori (2013) dalam bukunya *ulumul quran* menjelaskan bahwa secara etimologi, Al-qur'an berasal dari kata dasar *qara'a*, *qira'atan* dan *qur'anan* yang berarti sesuatu yang dapat dibaca. Al-quran juga merupakan kata dasar dari *qira'ah* yang berarti menghimpun dan mengumpulkan. Dikemukakan demikian sebab Alquran menghimpun beberapa huruf, kata, dan kalimat secara tertib serta tersusun dengan rapi dan benar. Sedangkan secara terminologi, Anshori (2013)

mengemukakan bahwa Al-qur'an adalah firman Allah SWT. melalui Malaikat Jibril kepada Nabi Muhammad SAW untuk disampaikan kepada seluruh umat manusia.

Salah satu keistimewaan Al-qur'an adalah isi Al-qur'an yang diterima umat islam dari generasi ke generasi tanpa mengalami perubahan, sebab Allah SWT sendiri telah menegaskan dalam firman-Nya, QS. Al-Hijr (15) ayat 9:

إِنَّا نَحْنُ نَزَّلْنَا الذِّكْرَ وَإِنَّا لَهُ لَحَافِظُونَ

Artinya: “Sesungguhnya kamilah yang menurunkan Qur'an, dan pasti Kami pula yang memeliharanya.”

Secara garis besar Al-qur'an yang diturunkan oleh Allah SWT kepada seluruh umat manusia ini mengandung pembahasan tentang aqidah, ibadah, muamalah, akhlaq, syariat, sejarah serta dasar-dasar ilmu pengetahuan dan teknologi.

### *Aqidah*

Aqidah dapat diartikan sebagai keimanan, kepercayaan atau keyakinan. Secara terminology dapat didefinisikan sebagai suatu kepercayaan yang harus diyakini dengan sepenuh hati, dinyatakan dengan lisan dan buktikan dengan amal perbuatan. Aqidah islam adalah kepercayaan yang bersumber dari Al-qur'an dan hadist. Jika seseorang yang menyatakan bahwa dirinya beraqidah islam maka dalam kehidupan sehari-hari harus meyakini dalam hati, menyatakan dengan lisan serta membuktikan dalam amal perbuatannya.

Inti pokok aqidah islam adalah masalah tauhid, yakni keyakinan bahwa Allah SWT adalah Tuhan Yang Maha Esa. Setiap muslim wajib meyakini ke-Esa-an Allah. Orang yang tidak meyakini ke-Esa-an Allah maka dalam pandangan islam disebut sebagai musyrik.

### *Ibadah*

Secara etimologi ibadah berasal dari kata *'abada* yang artinya mengabdikan atau menyembah. Sedangkan secara terminologi ibadah merupakan sebuah penyembahan atau pengabdian secara totalitas kepada Allah SWT, dengan penuh ketundukan, ketaatan dan kepatuhan kepada-Nya.

Ibadah memiliki makna yang sangat luas, yakni tidak hanya terbatas pada ritual semata, namun juga berkenaan dengan semua perbuatan baik yang dilakukan semata-mata karena Allah SWT. Ibadah terbagi menjadi 2 macam, yakni: ibadah mahdah atau disebut dengan ibadah khusus, yang tata caranya telah ditetapkan, seperti: shalat, puasa, zakat dan hajidan ibadah ghairu mahdah serta ibadah ghairu mahdah yakni ibadah yang sifatnya umum, tata cara melakukannya tidak ditetapkan secara khusus, melainkan disesuaikan dengan situasi dan kondisi namun dengan maksud semata-mata karena mencari keridhoan Allah SWT. Ibadah-ibadah yang dimaksud antara lain: bersedekah, menuntut ilmu, bersilaturahmi, mengajarkan kebaikan, dan sebagainya.

### *Muamalah*



Selain ibadah, dalam Al-qur'an juga membahas tentang hubungan antar sesama manusia, baik secara individu maupun kelembagaan. Dalam buku Ensiklopedia Islam (2005) dikatakan bahwa muamalah difahami sebagai hukum yang berkaitan dengan perbuatan manusia dengan sesamanya yang menyangkut harta dan hak serta penyelesaian kasus di antara mereka. Dengan demikian pengertian tersebut menunjukkan bahwa muamalah hanya mengatur permasalahan hak dan harta yang muncul dari transaksi antara seseorang dengan orang lain, atau antara seseorang dengan badan hukum, atau antara badan hukum dengan badan hukum yang lain.

### *Akhlaq*

Secara etimologi akhlaq berarti perangai, tingkah laku. Tabiat atau budi pekerti. Sedangkan secara terminologi, akhlaq merupakan sifat dalam jiwa manusia yang tampak dalam kehidupan sehari-hari. Dalam bahasa Indonesia, akhlaq memiliki makna etika, sikap atau moral. Akhlaq merupakan salah satu pondasi dalam agama islam yang sangat penting. Akhlaq seseorang merupakan cerminan hati dan jiwa. Jika akhlaq seseorang baik, maka orang tersebut memiliki jiwa yang baik. Begitu pula sebaliknya, jika akhlaqnya buruk maka hati dan jiwa orang tersebut dapat dikatakan sedang dalam kondisi tidak baik.

### *Syariat*

Syariat berasal dari kata *syara'*. Secara etimologi *syara'* berarti jalan yang dapat dilalui air, artinya jalan yang ditempuh manusia untuk menuju Allah. Djazuli (2005) mengemukakan

bahwa secara etimologi syariat memiliki banyak arti, diantaranya adalah “syariah” berarti ketetapan dari Allah bagi hamba-hambanya. Arti yang lainnya adalah; jalan yang ditempuh oleh manusia atau jalan yang menuju ke air. Kata syariah juga diartikan sebagai jalan yang terbentang luas. Sedangkan secara etimologi, syariah adalah hukum-hukum yang ditetapkan oleh Allah untuk hamba-hambanya yang dibawa oleh Nabi Muhammad SAW, dan berkaitan tentang cara tingkah laku manusia atau disebut dengan hukum-hukum furu’.

Awalnya, yang termasuk dalam ruang lingkup syariah adalah seluruh petunjuk agama, baik yang menyangkut aqidah, ibadah, etika, muamalah, dan hukum-hukum yang mengatur seluruh aspek kehidupan manusia. Namun, seiring dengan berkembangnya ilmu dan pengetahuan manusia, pengertian syariat pun mengalami perkembangan. Pada masa abad kedua dan ketiga, pembahasan tentang aqidah dilepas dari ruang lingkup syariah yang dikenal dengan nama ushuluddin, sedangkan pembahasan tentang etika dibahas secara tersendiri juga dalam ilmu yang dikenal dengan nama akhlaq. Sehingga istilah syariat mengalami penyempitan ruang lingkup yang membahas hukum yang mengatur perbuatan atau tingkah laku manusia.

### *Sejarah*

Sebagai kitab suci bagi umat islam, Al-qur’an banyak mengisahkan tentang sejarah-sejarah umat pada masa lalu. Sejarah dan kisah yang dijelaskan dalam Al-qur’an bukan hanya kisah dongeng semata, melainkan sejarah dan kisah

yang benar-benar terjadi di masa lalu. Allah SWT bermaksud memberikan kita pelajaran agar kondisi-kondisi tersebut tidak terulang pada masa sekarang maupun yang akan datang. Sudah seyogyanya, sebagai insan yang beriman kepada Allah menjadikan pengalaman (ibrah) untuk dijadikan sebagai petunjuk dalam menjalani kehidupan agar senantiasa berada pada jalan yang diridhoi Allah SWT. Beberapa kisah tersebut antara lain, kisah para nabi, kisah peradaban di masa lalu, kisah kehidupan para sahabat dan sahayiyah yang menjadi sebab (asbabun nuzul) turunya beberapa ayat Al-qur'an.

Al-Qur'an telah banyak menggambarkan umat-umat terdahulu baik yang iman dan taat kepada Allah SWT. maupun yang ingkar dan ma'siat kepada-Nya. Diharapkan dengan memperhatikan kisah umat terdahulu, umat Islam bisa mencontoh umat-umat yang taat kepada Allah SWT. dan menghindari perbuatan ma'siat kepada-Nya. Bagi umat yang beriman dan taat kepada Allah SWT., Allah SWT. telah memberikan kebaikan dan keberkahan dalam hidup mereka, sebaliknya bagi yang ingkar dan ma'siat kepada-Nya, Allah Swt.

### *Dasar-dasar ilmu pengetahuan dan teknologi*

Al-qur'an merupakan kitab suci yang tidak hanya mengandung nilai-nilai ibadah, syariat, aqidah dan muamalah sj, melainkan juga bukti-bukti keilmiah. Banyak terdapat isyarat ilmu pengetahuan, sains dan teknologi yang dapat dikembangkan untuk kemanfaatan hidup manusia. Allah SWT yang memiliki ilmu yang sangat luas. Dengan keluasan ilmunya, Allah memberikannya kepada manusia untuk dapat

menjalani dan memenuhi kehidupannya dengan baik. Allah SWT menegaskan betapa pentingnya menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi, sebagaimana Firman-Nya QS. Al-'alaq: 1-5:

اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ  
اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ  
مَا لَمْ يَكُنْ يَعْلَمُ

#### b. Hadist

Sumber rujukan hidup yang kedua adalah sunnah atau hadist. Hadist merupakan penjelas bagi hukum dan aturan dalam Al-qur'an yang bersifat implisit, yakni hukum dan aturan yang maknanya masih samar-samar atau bersifat global (umum) sehingga membutuhkan penjelasan tambahan agar mudah dipahami.

Hadist merupakan semua berita dari Nabi Muhammad SAW, baik berupa ucapan, perbuatan atau perbuatan para sahabat yang didiamkan olehnya. Suparta (2002) menjelaskan bahwa secara etimologis hadis atau al-hadist berasal dari kata dasar *al-jadid* artinya sesuatu yang baru, yakni menunjukkan kepada waktu yang dekat atau waktu yang singkat. Sedangkan menurut terminologi, para ahli memiliki perbedaan pandangan dalam mendefinisikannya, sesuai dengan latar belakang bidang keilmuan. Suparta (2002) mengemukakan bahwa para ahli hadist mendefinisikan pengertian hadist sebagai segala perkataan Nabi, perbuatan dan hal ihwalnya. Hal ikhwal artinya segala yang diriwayatkan dari Nabi

Muhammad SAW, yang berkaitan dengan himmah, karakteristik, sejarah kelahiran dan kebiasaan-kebiasaannya.

Hadist dikelompok menjadi beberapa kategori yakni;

- a. Keutuhan Sanad, yakni didasarkan pada keutuhan sanadnya. Hadist ini dikelompokkan menjadi *enam* jenis, sebagai berikut:
  1. Hadist Mursal
  2. Hadist Munqathi'
  3. Hadist Mudlal
  4. Hadist Mu'allaq
  5. Hadist Mudallas
  6. Hadist Musnad
- b. Jumlah Perawi, yakni didasarkan pada jumlah perawinya. Hadist ini dikelompokkan menjadi *dua* jenis, sebagai berikut:
  1. Hadist Mutawatir
  2. Hadist Ahad
- c. Tingkatan Keaslian, yakni didasarkan pada tingkat keasliannya. Hadist ini dikelompokkan menjadi *empat* jenis, sebagai berikut:
  1. Hadist Shahih
  2. Hadist Hasan
  3. Hadist Dhaif
  4. Hadist Maudhu'

## BAB IV. Integrasi Matematika dan Islam

Tujuan pendidikan nasional yang tertuang dalam UU No 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional, menyatakan bahwa “Pendidikan nasional berfungsi mengembangkan kemampuan dan membentuk watak serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa, bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokrasi serta bertanggung jawab.” Secara jelas, salah satu tujuan dari pendidikan dalam undang-undang di atas adalah mengembangkan potensi peserta didik menjadi insan yang berilmu, beriman dan bertaqwa terhadap Tuhan Yang Maha Esa dan berakhlak mulia.

Dalam islam, menuntut ilmu sangat dianjurkan oleh Rasulullah SAW bagi umatnya, sebagaimana dalam hadist yang diriwayatkan oleh HR Ibnu Majah bahwa “Mencari ilmu adalah kewajiban atas setiap muslim”. Melalui Al-qur’an, dalam banyak ayat, Allah SWT mengisyaratkan kepada hamba-Nya untuk menuntut ilmu. Sebab, menuntut ilmu khususnya ilmu agama merupakan sarana untuk menjalani kehidupan secara baik dan benar. Menuntut ilmu pengetahuan juga merupakan salah satu cara dan sarana untuk mencapai perkembangan dunia Muslim. Islam merupakan nilai, berkembang dan tidaknya islam, bergantung dari pemeluknya. Olehnya itu, mukmin yang berilmu akan ditinggikan derajatnya oleh Allah SWT dibandingkan dengan mukmin yang tidak berilmu. Firman Allah, QS. Al-Mujadillah ayat 11:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ  
اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ  
أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Artinya: "Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antarmu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan.

Allah SWT juga telah menegaskan bahwa dalam pengembangan ilmu perlu menganalisis suatu kejadian dengan menggunakan logika dan berpikir. Matematika merupakan salah satu bidang keilmuan yang mengasah kemampuan berpikir dan logika. Sebab di antara objek kajian dalam matematika yakni meliputi: Kemampuan menyelidiki, kemampuan memecahkan masalah, kemampuan belajar dan bekerja mandiri, bersikap positif terhadap matematika.

Kebanyakan orang memandang bahwa matematika sebagaimana ilmu alam dan sains lainnya, kemanfaatannya hanya di dunia saja. Sehingga dianggap belajar matematika tidak dapat mempengaruhi seseorang meningkatkan kesadaran spiritualnya. Tentu hal itu merupakan pandangan yang salah. Justru matematika memiliki hubungan yang

sangat erat dengan tradisi spiritual umat islam. Matematika memiliki keistimewaan yang tidak dimiliki bidang ilmu lainnya. Kajian objeknya berada pada dunia nyata maupun khayal. Objek matematika pada dunia nyata yang di bawa ke dalam bahasa matematika disebut abstraksi sedangkan mewujudkan matematika dalam dunia nyata disebut aplikasi.

Untuk memahami objek yang nyata diperlukan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (*bayani* dan *burhani*). Sedangkan untuk memahami objek yang gaib diperlukan pendekatan intuitif, imajinatif, dan metafisis (*irfani*). Kekuatan utama dalam matematika justru terletak pada imajinasi atau intuisi yang kemudian diterima setelah dibuktikan secara logis atau deduktif. Dengan demikian, maka untuk mempelajari matematika perlu penggabungan ketiga pendekatan tersebut, yaitu *bayani*, *burhani*, dan *'irfani*.

Mempelajari matematika melibatkan dua potensi, yakni jasmani dan ruhani, atau *aql* dan *qalb* secara bersama. *Qalb* saja memang dapat mempelajari matematika, tetapi kadang tidak dapat memberikan penjelasan yang logis dan rasional. *Qalb* dapat menjawab  $3 - 1 = 2$ , tetapi kadang tidak dapat menjawab mengapa bisa 2. *Aql* saja dapat mempelajari matematika, tetapi kadang terlalu lama dalam berpikir dan tidak dapat menangkap hakikat. Belajar matematika perlu melibatkan potensi intelektual, emosional, dan spiritual secara bersamaan. Olehnya itu diperlukan penggunaan *aql* dan *qalb* secara bersama, melalui jalur jasmani (*kasab*) dan juga jalur ruhani (*kasyaf*). Aspek pengembangan kemampuan berpikir (*kognitif*), sikap (*afektif*), dan perilaku (*psikomotor*) dalam belajar matematika dapat



tercapai dengan baik dengan paradigma ulul albab. Potensi dzikir untuk mengembangkan aspek afektif dan fikir untuk mengembangkan aspek kognitif agar menghasilkan amal sholeh (*psikomotor*). Belajar matematika yang abstrak, yang memerlukan kemampuan pikir dan imajinasi dapat dilakukan dengan paradigma ulul albab yang menggunakan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (*bayani dan burhani*) sekaligus pendekatan intuitif, imajinatif, dan metafisis (*irfani*).

Telah banyak ilmuwan muslim yang mengkaji hubungan antara matematika dalam islam. Abdusysykir dalam bukunya yang berjudul Kyai Mengajar Matematika menyatakan bahwa matematika memiliki hubungan yang erat dengan tradisi spiritual umat islam yang terkandung dalam Al-qur'an. Menurutnya, matematika juga dapat dijadikan sebagai jalan mencapai kemanfaatan di dunia maupun akhirat.

## BAB V. Eksplorasi Materi Bilangan

Pada bab ini materi bilangan yang dieksplorasi adalah operasi pada bilangan bulat dan pecahan, yakni berkaitan dengan operasi hitung bilangan antara lain: penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Namun terlebih dahulu dijelaskan tentang konsep materi bilangan. Penjelasan tentang materi bilangan di sadur dari buku ensiklopedia matematika (2010) karangan St. Negoro dan B. Harahap. Berikut penjelasan materi bilangan.

### Materi Bilangan

Bilangan adalah suatu idea. Bilangan bukan simbol atau lambing dan bukan pula lambang bilangan. Bilangan memberikan keterangan mengenai banyaknya anggota suatu himpunan.

### *Nama Bilangan*

Untuk membedakan bilangan yang satu dari yang lain, diperlukan nama. Misalnya nama bilangan dari himpunan A di atas adalah “tiga”. Nama bilangan himpunan kosong adalah nol. Nama bilangan yang diberikan kepada bilangan tidak sama, tergantung pada bahasa yang dipergunakan misalnya; orang Cina menamakan bilangan tiga dengan “san”. Orang Inggris dengan “three”, orang jawa dengan “telu” dan lain-lain.

Nama bilangan-bilangan yang sudah kita kenal antara lain:

Nol diwakili oleh lambang 0

Satu diwakili oleh lambang 1

Dua diwakili oleh lambang 2

Tiga diwakili oleh lambang 3

Untuk bilangan 138, namanya seratus tiga puluh delapan.

Untuk 1380, namanya: seribu tiga ratus delapan puluh. Tetapi untuk bilangan 13800 namanya bukan “sepuluh ribu tiga ribu delapan ratus”, melainkan: tiga belas ribu delapan ratus.

### *Lambang Bilangan*

Suatu bilangan dinyatakan dengan lambang bilangan. Lambang suatu bilangan dapat dinyatakan dengan bermacam-macam lambang, misalnya untuk bilangan enam dapat dinyatakan dengan lambang:

6

VI (Romawi)

Suatu bilangan dapat pula diwakili oleh beberapa lambang bilangan. Misalnya, lambang bilangan enam, dapat diwakili oleh lambang-lambang”

6

$5 + 1$

$2 \times 3$

$7 - 1$

$18 : 3$ , dan seterusnya

Sebaliknya, setiap lambang hanya mewakili sebuah bilangan saja. Lambang 4 hanya mewakili bilangan empat saja. Jadi, setiap bilangan dapat diwakili oleh lebih dari satu lambang, sebaliknya setiap lambang hanya mewakili satu bilangan saja.

## Eksplorasi Materi Bilangan

### a. Penjumlahan

Nilai keislaman: *Keadilan (akhlak)*

Contoh:

$$3x + 5 = 20$$

$$3x + 5 - 5 = 20 - 5$$

$$3x = 15$$

$$3x (1/3) = 15 (1/3)$$

$$x = 3$$

### *Eksplorasi:*

Pada sifat penghapusan, kedua ruas diberikan perlakuan yang sama, yakni pada baris *kedua* ketika mengurangi kedua ruas dengan angka 5 dan pada baris *keempat* mengalikan dengan angka  $1/3$ . Kaitannya dengan kehidupan sehari-hari, perlakuan yang sama di atas dapat diartikan sebagai sifat adil, yakni sifat memberikan perlakuan yang sama terhadap semua orang atau tidak membeda-bedakan. Allah Swt dalam banyak ayat menjelaskan tentang akhlak tersebut, antara lain:

QS. Al-Hujurat ayat 9, “Dan berlaku adil-lah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berlaku adil”.

QS. An-Nahl ayat 126, “Dan jika kamu memberikan balasan, maka balaslah dengan balasan yang sama dengan siksaan yang ditimpakan kepadamu. Akan tetapi jika kamu bersabar, sesungguhnya itulah yang lebih baik bagi orang-orang yang sabar”

QS. Asy-Syura ayat 40, "Dan balasan suatu kejahatan adalah kejahatan yang serupa, tetapi barangsiapa memaafkan dan berbuat baik (kepada orang yang berbuat jahat) maka pahalanya dari Allah. Sungguh Dia tidak menyukai orang-orang zalim".

b. Perkalian

Contoh (1):

Prinsip perkalian sebagai berikut;

+ x + = +

+ x - = -

- x + = -

- x - = +

*Eksplorasi:*

Jika prinsip tersebut diintegrasikan dengan nilai islam, maka:

+ x + = +, bermakna "jika ada suatu kebenaran dan kita katakan benar maka sifat tersebut merupakan sifat yang benar". Suatu kebenaran yang dikatakan benar merupakan sifat dan perilaku jujur. Allah Swt melalui firman-Nya memerintahkan hamba-Nya untuk berperilaku jujur, salah satunya QS. Al-Ahzab ayat 23-24, *"Di antara orang-orang mukmin itu ada orang-orang yang menepati apa yang telah mereka janjikan kepada Allah. Dan di antara mereka ada yang gugur, dan di antara mereka pula ada yang menunggu-nunggu dan mereka sedikit pun tidak mengubah (janjinya), agar Allah memberikan balasan kepada orang-orang yang*

*jujur itu karena kejujurannya, dan mengazab orang munafik jika Dia kehendaki, atau menerima taubat mereka. Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang*". Dan beberapa surat lain diantaranya: QS. AAl-Baqarah: 177, QS. Al-Maidah: 119, QS. Yusuf: 51, QS. Asy-Syuara': 84, QS. Al-Ahzab: 35, QS. Az-Zumar: 33-35, QS. At-Taubah: 119, QS. Al-Ankabut: 3 dan lainnya. Selain itu, sabda Rasulullah yang di riwayatkan oleh Imam Bukhori dan Muslim yakni, *"Sesungguhnya kejujuran menunjukkan kepada perbuatan baik, dan perbuatan baik menunjukkan kepada surga dan sesungguhnya seseorang yang membiasakan jujur ia akan dicatat di sisi Allah sebagai orang yang jujur. Dan, sesungguhnya dusta menunjukkan kepada perbuatan dosa, dan perbuatan dosa menunjukkan kepada neraka, dan sesungguhnya seseorang yang biasa berdusta ia akan dicatat di sisi Allah sebagai pendusta."* (HR. Bukhari Muslim).

+ x - = -, bermakna "jika ada suatu kebenaran dan kita katakan salah maka sifat tersebut merupakan sifat yang salah". Suatu kebenaran yang dikatakan salah merupakan sifat atau perilaku tidak jujur (bohong). Allah Swt melalui firman-Nya melarang hamba-Nya untuk berperilaku jujur, salah satunya QS. An-Nahl ayat 116 *"Dan janganlah kamu mengatakan terhadap apa yang disebut-sebut oleh lidahmu secara dusta "ini halal dan ini haram", untuk mengada-adakan kebohongan terhadap Allah. Sesungguhnya orang-orang yang mengada-adakan kebohongan terhadap Allah tiadalah*

*beruntung.” Pada surah yang lain, yakni: QS. Zumar: 3, “Ingatlah, hanya kepunyaan Allah-lah agama yang bersih (dari syirik). Dan orang-orang yang mengambil pelindung selain Allah (berkata): “Kami tidak menyembah mereka melainkan supaya mereka mendekatkan kami kepada Allah dengan sedekat-dekatnya”. Sesungguhnya Allah akan memutuskan di antara mereka tentang apa yang mereka berselisih padanya. Sesungguhnya Allah tidak menunjuki orang-orang yang pendusta dan sangat ingkar.” Serta QS. An-Nuur: 7.*

- $x + = -$ , bermakna "jika ada suatu kesalahan dan kita katakan benar maka sifat tersebut merupakan sifat yang salah". Sifat dan perilaku yang tergolong dalam sifat tersebut adalah berbohong.
- $x - = -$ , bermakna "jika ada suatu kesalahan dan kita katakan salah maka sifat tersebut merupakan sifat yang benar". Sifat dan perilaku yang tergolong dalam sifat tersebut adalah jujur.

Contoh (2):

Nilai keislaman: *Kejujuran (akhlaq)*

$-4 \times 5 = -20$  (benar)

$-4 \times 5 = 20$  (salah)

Eksplorasi: Dalam matematika jika terdapat proses penyelesaian yang tidak sesuai dengan prinsip atau teorema-teorema, maka dinyatakan salah. Karena

definisi atau teorema yang digunakan sudah terbukti kebenarannya.

c. Pembagian

Contoh:

Nilai Keislaman: *Syariat dalam Al-qur'an, keadilan dan kebijaksanaan (akhlak)*

Q.S. An-nissa: 11

يُوصِيكُمُ اللَّهُ فِي أَوْلَادِكُمْ لِلذَّكَرِ مِثْلُ  
حَظِّ الْأُنثَيَيْنِ ۚ فَإِن كُنَّ نِسَاءً فَوْقَ اثْنَتَيْنِ  
فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَ ۚ وَإِن كَانَتْ وَاحِدَةً فَلَهَا  
النِّصْفُ ۚ وَلِأَبَوَيْهِ يَكُلُّ وَاحِدٍ مِّنْهُمَا  
الْشُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُ وَلَدٌ ۚ فَإِن لَّمْ  
يَكُن لَهُ وَلَدٌ وَوَرِثَهُ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ الثُّلُثُ ۚ  
فَإِن كَانَ لَهُ إِخْوَةٌ فَلِأُمِّهِ الشُّدُسُ ۚ مِن بَعْدِ  
وَصِيَّةٍ يُوصَىٰ بِهَا أَوْ دِينٍ ۗ أَلْبَاءُكُمْ وَأَبْنَاؤُكُمْ  
لَا تَدْرُونَ أَيُّهُمْ أَقْرَبُ لَكُمْ نَفَعًا ۚ فَرِيضَةٌ

مِّنَ اللَّهِ ۚ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا ﴿١١﴾

"Allah mensyari'atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. Yaitu: bagian seorang anak lelaki sama dengan bagian dua orang anak perempuan; dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua, maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, maka ia memperoleh sebagian harta.



*Dan untuk dua orang ibu-bapa, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapanya (saja), maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) manfaatnya bagimu. Ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Bijaksana”.*

Eksplorasi: Ayat di atas menjelaskan tentang pembagian harta warisan. Dalam matematika konsep yang berhubungan dengan ayat tersebut adalah bilangan pecahan. Beberapa bilangan pecahan yang digunakan dalam pembagian harta warisan adalah:

- a. Harta warisan untuk anak laki-laki 2 kali bagian dari anak perempuan.
- b. Jika orang yang meninggal tidak punya anak laki-laki dan hanya punya satu anak perempuan maka bagiannya  $\frac{1}{2}$ , sedangkan jika punya anak perempuan. lebih dari satu maka bagiannya adalah  $\frac{2}{3}$ .

- c. Bagian warisan bapak dan ibu, dan jika yang meninggal punya anak maka keduanya sama-sama mendapat bagian  $1/6$ .
- d. Bagian harta warisan ibu jika yang meninggal tidak punya anak adalah
- e. Harta warisan boleh dibagi setelah membayar semua hutang yang meninggal.

Ayat di atas menjelaskan perintah Allah kepada umat Islam untuk berbuat adil kepada anak-anak yatim. Dahulu orang-orang Jahiliyyah memberikan seluruh harta warisan hanya untuk laki-laki, tidak untuk wanita. Maka, Allah swt. memerintahkan kesamaan di antara mereka dalam asal hukum waris dan membedakan bagian di antara dua jenis tersebut, di mana bagian laki-laki sama dengan dua bagian perempuan. Hal itu disebabkan karena laki-laki membutuhkan pemenuhan tanggung jawab nafkah, kebutuhan, serta beban perdagangan, usaha dan resiko tanggung jawab, maka sesuai sekali jika ia diberikan dua kali lipat daripada yang diberikan kepada wanita.

Selain itu ayat di atas secara tidak langsung menyiratkan larangan untuk bersifat tamak. Orang yang bersifat tamak sesungguhnya orang yang lupa bahwa Allah Swt telah mengatur rezki masing-masing hamba-Nya. Orang seperti ini menganggap bahwa dunia adalah sumber kehidupan sehingga sangat berambisi untuk

mendapatkan harta dunia sebagai kepuasan hidup.



## BAB VI. Matematika & Islam

### a. Matematika sebagai Ilmu Keislaman (*Islamic Science*)

Ilmu keislaman adalah suatu ilmu pengetahuan yang menurut agama Islam harus dipelajari. Isyarat tentang perlu mempelajari suatu ilmu keislaman itu terdapat dalam Al-Qur'an, Āli 'Imrān (3): 190-191:

*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi dan silih bergantinya malam dan siang, terdapat tanda-tanda bagi orang yang berakal (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk. atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi; Tuhan kami, tidaklah engkau menciptakan ini dengan sia-sia; Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.*

Kedua ayat tersebut menginformasikan bahwa manusia yang berakal murni (*albāb*) hendaknya mempelajari dan menyelidiki alam dan gejala-gejalanya. Mereka yang berfikir murni itu baik laki-laki maupun perempuan yang terus menerus dzikrullah (mengingat Allah) dalam segala situasi, susah atau senang, dan memikirkan alam ciptaan Allah. Hasil dari pemikiran itu berupa suatu pengakuan tentang adanya Allah sebagai pencipta alam semesta dan gejala-gejalanya tersebut. Semuanya itu diciptakan Allah tidak tanpa tujuan.

Selain alam, sebagaimana telah dijelaskan, manusia baik sendiri maupun bersama-sama (masyarakat) juga dijadikan

sebagai objek studi. Manusia adalah makhluk Allah yang lebih sempurna dibandingkan dengan makhluk lainnya (Al-Qur'an, 95:4). Di dalam Al-Qur'an terdapat kata الإنسان dalam 65 ayat yang merujuk pada manusia perorangan. Ayat-ayat itu menginformasikan tentang penciptaan manusia, sifat-sifat pribadi manusia, dan sikap perilaku manusia. Manusia dalam bentuk kelompok dinyatakan dengan ummah atau umam (bentuk jamak) dalam 64 ayat Al-Qur'an. Kata itu mengandung beberapa pengertian. Pertama, menyatakan kelompok pengikut dari seorang nabi seperti umat nabi Nuh, umat nabi Ibrahim, Umat nabi Musa, umat nabi Isa, dan umat nabi Muhammad. Kedua, menyatakan kelompok manusia yang menganut agama tertentu seperti umat Yahudi, umat Nasrani, dan umat Islam. Ketiga, kumpulan manusia dari berbagai lapisan sosial yang disatukan dalam ikatan sosial tertentu.

Manusia secara perorangan dalam penciptaannya (aspek biologis) dipelajari berdasarkan firman Allah dalam Al-Qur'an, Al-'Alaq (96): 1-5:

*Bacalah dengan nama Tuhanmu yang mencipta  
Yang telah menciptakan manusia dari 'alaq  
Bacalah dan Tuhanmu yang Maha Mulia  
Yang mengajar dengan pena  
Mengajar manusia apa yang belum diketahuinya*

Rangkaian ayat-ayat yang mula-mula turun ini menjelaskan tentang Tuhan yang Pencipta, Yang Maha Mulia dan Pengajar. Manusia adalah makhluk yang dicipta, yang dimuliakan, dan diajar oleh Tuhan tentang apa yang belum diketahuinya. Di

antara yang belum diketahui manusia itu adalah manusia itu sendiri, perorangan maupun kelompoknya.

Dalam ayat lain, Al-Qur'an, Al-An'am (6): 11 Allah berfirman:

*Katakanlah: "berjalan di bumi, kemudian lihatlah akibat dari orang-orang yang berdusta.*

Melalui ayat tersebut Allah SWT memerintahkan manusia untuk melakukan perjalanan di atas muka bumi ini untuk mempelajari kerusakan yang telah diperbuat oleh orang-orang yang berdusta. Dengan begitu perbuatan manusia dalam kaitannya dengan alam dan dengan sesama manusia.

Selain alam dan manusia, wahyu (Al-Qur'an dan Sunnah) menjadi objek studi ilmu keislaman. Ilmu yang menjadikan wahyu sebagai objek studinya disebut ilmu agama. Kewajiban menuntut ilmu agama di jelaskan dalam Al-Qur'an, At-Taubah (9): 122:

*Tidak sepatutnya bagi orang-orang mukmin semuanya pergi ke medan perang. Maka mengapa tidak terdapat sebagian di antara tiap kelompok dari mereka pergi memperdalam ilmu agama, dan untuk memberikan peringatan kepada kaum mereka ketika telah kembali, agar mereka berhati-hati.*

Demikianlah dalam Al-Qur'an terdapat 3 objek ciptaan Tuhan yang dijadikan sebagai sasaran studi, yaitu alam dan gejala-gejalanya, manusia perorangan dan masyarakat, serta

wahyu dan penafsirannya. Masing-masing objek studi itu melahirkan jenis ilmu tersendiri. Studi terhadap alam melahirkan kelompok ilmu-ilmu pasti alam, dari studi terhadap manusia lahirilah ilmu-ilmu sosial dan humaniora, dan hasil studi terhadap wahyu berupa ilmu-ilmu syariah atau ilmu-ilmu keagamaan. Ketiga jenis ilmu yang disebut ilmu-ilmu keislaman tersebut harus dipelajari oleh umat Islam. Sebahagian umat mempelajari dan mendalami ilmu-ilmu pasti-alam (*science*), sebahagiannya mempelajari dan mendalami ilmu-ilmu sosial dan homaniora (*sosial science & humaniora*), dan sebahagian lainnya mempelajari dan mendalami ilmu-ilmu keagamaan (*theology*). Kemajuan suatu masyarakat atau umat sangat tergantung pada penguasaan ilmu-ilmu keislaman tersebut. Oleh karena itu selain Allah SWT, Rasulullah SAW juga sangat menganjurkan umatnya agar memiliki ilmu pengetahuan. Nabi Muhammad juga menganjurkan untuk umatnya belajar menuntut ilmu walaupun jauh di Tanah Cina. Anjuran tersebut bukan dimaksudkan untuk mempelajari ilmu-ilmu keagamaan, tetapi untuk mempelajari sains dan teknologi yang sudah sangat maju di Cina pada abad VII tersebut.

Matematika tentu termasuk bahagian dari sains. Meskipun matematikawan (ahli matematika) menciptakan matematika dalam pikirannya, tetapi tidak terlepas dari observasinya terhadap hal-hal yang nyata dalam alam ini. Aksioma-aksioma yang diciptakan secara logika, tetapi harus sesuai dengan dunia nyata (alam).

## **b. Kegunaan Matematika**

Matematika sangat bermanfaat bagi umat Islam. Matematika sangat membantu dalam hal pelaksanaan beberapa ajaran agama, misalnya penentuan waktu pelaksanaan beberapa ibadah terutama:

1. Shalat yang wajib dilaksanakan oleh seorang muslim yaitu Shalat Maghrib, Shalat Isya, Shalat Shubuh, Shalat Dhuhur dan Shalat Ashar. Semua shalat tersebut dilaksanakan pada waktu tertentu dalam satu hari, 24 jam. Setiap shalat dilaksanakan dalam waktu tertentu, dan pada prinsipnya tidak dapat dilaksanakan selain pada waktunya itu. Dalam hubungan ini Allah berfirman dalam Al-Qur'an, An-Nisa' (4): 103, "Sesungguhnya Shalat itu adalah kewajiban yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman." Waktu suatu shalat ditetapkan berdasarkan Sunnah Rasulullah yang dinyatakan secara kualitatif. Waktu shalat Shubuh dimulai ketika terbit fajar dan berakhir ketika terbit matahari. Tetapi terbit fajar dan matahari tidak pada waktu yang tetap dan jarak waktu antara keduanya relatif. Dengan kemajuan matematika, waktu suatu shalat itu sekarang ditentukan secara kuantitatif berupa jam dan menit melalui perhitungan astronomi bahagian dari matematika. Melalui jasa matematika itu disusun suatu daftar waktu shalat wajib untuk daerah tertentu. Oleh karena waktu senantiasa berubah, maka daftar waktu shalat dibuat untuk masa satu bulan.
2. Puasa wajib, dilaksanakan dalam bulan Ramadhan. Dalam Al-Qur'an, Al-Baqarah (2):185, Allah berfirman: "Bulan



Ramadhan yang di dalamnya diturunkan (permulaan ayat) Al-Qur'an sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan serta pembeda (antara yang hak dan yang bathil). Maka barang siapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu hendaknya dia berpuasa." Pengertian hadir di bulan itu adalah telah masuk bulan Ramadhan. Dengan begitu permulaan puasa adalah pada satu Ramadhan dan diakhiri pada pada 29 atau 30 Ramadhan. Penentuan hari pertama dan hari terakhir bulan Ramadhan melalui dua cara, rukyah dan hisab. Cara rukyah dengan melihat hilal 1 Ramadhan dengan mata-kepala sedangkan cara hisab ditentukan melalui perhitungan falak. Seringkali terjadi perbedaan penetapan awal atau akhir Ramadhan, karena menurut rukyah belum terlihat bulan sedangkan menurut hisab telah ada bulan meskipun belum dapat dilihat dengan mata-kepala. Penentuan dengan hisab berarti dengan matematika.

3. Haji adalah ibadah wajib yang dilaksanakan sekali dalam hidup bagi orang yang berkesanggupan untuk melaksanakannya. Haji dilaksanakan pada bulan-bulan tertentu (al-Qur'an, Al-Baqarah (2):197). Pada prinsipnya haji dilaksanakan pada bulan Dzulhijjah. Haji dimulai dengan Wukuf di Arafah pada 9 Dzulhijjah dan melontar Jamratul Ula pada 10 Dzulhijjah dan 3 jamrah pada hari-hari tasyri' yaitu 11, 12, dan 13 Dzulhijjah. Penentuan hari-hari dalam bulan Dzulhijjah tersebut dilakukan melalui perhitungan falak. Demikianlah matematika dapat membantu untuk menentukan hari-hari pelaksanaan ibadah haji tersebut.

Perhitungan tentu dengan menghitung permulaan bulan Dzulhijjah.

Selain untuk penentuan waktu shalat, matematika juga diperlukan untuk menghitung jumlah harta warisan. Bila seseorang meninggal dunia dengan meninggalkan harta yang cukup banyak, maka harta peninggalannya dibagikan kepada ahliwaris yang telah ditentukan oleh agama. Persentase atau besarnya bahagian seorang ahliwaris telah ditetapkan pula oleh Allah SWT (Al-Qur'an, An-Nisa' (4): 11-12). Tetapi jumlah harta yang diperoleh berdasarkan bahagiannya perlu dihitung. Perhitungan dilakukan dengan bantuan matematika.

### **c. Matematika dalam Sejarah Islam**

Pada periode klasik Islam (abad VII-XIII), umat Islam telah mengembangkan berbagai macam ilmu pengetahuan dan teknologi. Di antara ilmu pengetahuan itu terdapat terdapat sains eksakta. Dapat dikemukakan bahwa kontribusi Muslim terutama berupa pendapat tentang adanya hubungan yang erat antara matematika, geometri, dan astronomi. Usaha pengembangan ketiga ilmu itu menunjukkan pentingnya ilmu-ilmu tersebut bagi kehidupan umat selain untuk perkembangan ilmu pengetahuan itu sendiri. Ilmu pengetahuan pasti alam dikembangkan dengan motivasi agama. Allah SWT dalam Al-Qura'an, Fushshilat (41): 53 berfirman:

*Kami akan memperlihatkan kepada mereka ayat-ayat Kami di seganap ukuf dan pada diri mereka sendiri.*

Pada ayat tersebut Allah menantang manusia untuk belajar dan mempelajari tanda-tanda-Nya yang terdapat pada segala penjuru dunia dan ada pada diri manusia itu sendiri. Tanda-tanda keberadaan Allah itu ditegaskan dalam Surah Ar-Rum (30):22:

*Dan di antara tanda-tanda-Nya adalah penciptaan langit dan bumi serta perbedaan lidah kamu. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi orang yang alim.*

Ayat tersebut menjelaskan tentang tanda-tanda yang terdapat pada bumi dan langit dan pada diri manusia. Tanda-tanda Allah itu berupa sunnatullah atau hukum alam yang melekat dan mengatur pergerakan alam itu, berupa gejala-gejala alam, dan mengatur pertumbuhan dan perkembangan manusia individu dan sosialnya. Sunnatullah atau hukum-hukum alam itu hanya bisa diketahui oleh orang-orang yang alim, para saintis. Bagi saintis muslim pengetahuan tentang hukum-hukum alam itu akan mengantar mereka kepada keimanan yang makin kuat tentang adanya Allah SWT, pencipta alam semesta dan manusi serta ketaatan yang lebih terhadap-Nya. Pengungkapan Sunnatullah pada alam tentunya sangat bermanfaat bagi umat manusia yang menggunakan pengetahuan itu untuk kepentingan pengadaan teknologi baik

untuk penguasaan alam maupun untuk kehidupan manusia pada umumnya.

Perlu diketahui bahwa nomor angka yang digunakan dalam perhitungan matematika sekarang yang lebih praktis dibandingkan dengan angka Romawi dikembangkan oleh sarjana-sarjana muslim. Memang, lambang nomor-nomor tersebut berasal dari India, tetapi diambil alih dan dikembangkan oleh orang Arab muslim, sehingga di Barat dikenal dengan nomor Arab. Dua sarjana muslim, Umar Kayyan (W. 525/1130) dan Nasiruddin At-Tusi (W. 645/1247) yang menggunakan nomor itu dalam perhitungan dan penentuan jarak berdasarkan angka. Adalah Tsābit bin Qurrah mengemukakan teori angka yang tak terhingga (*infinite numbers*) sebagai bahagian dari seri angka tak terhingga lainnya. Tetapi yang sangat penting adalah penemuan simbol nol yang belum pernah digunakan di India. Lambang itu diberi nama *shifr* (nol). Kemudian mereka membuat sistem desimal. Muhammad bin Musa Al-Khawārizmī (w. 235/850) seorang ahli matematika yang memperkenalkan sistem simbol mewakili sembilan angka dan penemu angka nol tersebut. Ia juga yang pertama kali mengetengahkan nilai-nilai angka dalam posisi digital Sistem simbol pengganti kata dan nilai angka digital tersebut kemudian dilanjutkan dalam karya Ibrahim Al-Uqlidīsī dan dipopulerkan oleh Ghiyāt Addin Jamsyīd Al-Kāsyī. Kemudian berkembang ke Eropa. Khawārizmī yang menemukan aljabar. Disiplin baru itu diberinya nama Aljabar wal Muqabalah (Pertalian dan Penjajaran). Muslim pertama kali menemukan simbol untuk menunjukkan kuantitas yang tidak diketahui. Misalnya simbol *s* (sekarang *x*).

Dalam hal astronomi Kaum Muslimin mengambil alih dari Mesopotamia yang telah maju dalam hal ini tetapi masih bercorak mitologi. Kaum Muslimin membersihkan unsur-unsur mitologi tersebut dan kemudian mengembangkannya. Salah seorang sarjana terkenal dalam bidang ini adalah Fakhruddin Ar-Rāzi (606/1209). Ia mempersoalkan pendapat Aristoteles yang menyatakan bahwa bintang-bintang di angkasa tidak bergerak dan sama jauh posisinya dari bumi dan klaim bahwa benda-benda langit adalah sama dan serupa. Ketika memberi tafsiran terhadap ayat 258, Al-Baqarah (2), Ar-Rāzi membenarkan bahwa tidak ada sesuatu kejadian yang berlawanan tidak ada kasusnya. Gerakan yang ril dari benda-benda langit mungkin berbeda dengan apa yang diobservasi oleh tidak adanya bantuan bagi penglihatan. Menurut Al-Biruni untuk astronomi diperlukan eksperimen dan pengujian data. Al-Bhthāni menghitung lama tahun matahari dengan selisih 2 menit 22 detik.

#### **d. Beberapa Prinsip Matematika**

Matematika mempunyai beberapa prinsip yaitu beberapa hal yang merupakan dasar bagi matematika. Beberapa di antaranya dapat ditinjau dari sudut pandang Islam dengan maksud dapat menjadi bagian dari sikap dan perilaku yang diperlukan dalam kehidupan seorang Muslim. Oleh karena itu sikap dan perilaku matematis semacam itu perlu disadari dan dijadikan bagian dari pendidikan matematika. Beberapa prinsip matematika yang relevan dengan ajaran Islam itu adalah:

4. Pernyataan yang benar. Dalam kehidupan sehari-hari, manusia sering membuat atau mendengar dan membaca pernyataan-pernyataan. Pernyataan itu ada yang benar dan ada yang salah. Pernyataan yang benar sebagai salah satu prinsip matematika sangat dianjurkan oleh Islam. Dalam Al-Qur'an pernyataan yang benar dipuji oleh Allah SWT dan pernyataan yang salah dicela oleh Allah SWT. Pernyataan Firaun (salah seorang raja Mesir) kepada nabi Musa bahwa "saya tuhanmu yang maha tinggi" adalah salah baik menurut keyakinan keagamaan maupun menurut logika matematika. Sedangkan pernyataan nabi Musa, "Tuhan kamilah yang lebih tinggi" (Al-Qur'an, Thaha (20):50). Islam juga mencela pernyataan yang tidak benar itu sebagai fitnah yang harus dihindari oleh Muslim. Karena itu Islam menganjurkan untuk *tabayyun* (mencari pembenaran) dari suatu pernyataan (Al-Qur'an, Al-Hujarāt (49): 6).
5. Berfikir logis. Allah SWT dalam Al-Qur'an menantang manusia untuk menggunakan akal. Anjuran itu berulang disampaikan oleh Allah dalam bentuk pertanyaan yang jawabannya ada pada pertanyaan itu sendiri. "Apakah kamu tidak berfikir" atau "Apakah kamu tidak menggunakan akal?" Dalam Al-Qur'an dijumpai logika deduktif dan induktif. Pernyataan bahwa "Tuhanlah yang menjadikan langit dan bumi" bersifat deduktif sementara itu Allah menganjurkan manusia untuk melihat bagaimana ontologi diciptakan dan langit ditegakkan, dan bumi dihamparkan (Al-Qur'an, Al-Ghasiyah (88): 17-20), bersifat induktif.

6. Hemat adalah salah satu prinsip matematika. Dengan menggunakan simbol-simbol-simbol pernyataan-pernyataan yang panjang dapat dipersingkat. Prinsip hemat ini sangat ditekankan dalam Islam. Bersikap dan perilaku hemat itu dijelaskan dalam Al-Qu'an, Al-Isra' (17): 29,

*Dan janganlah engkau jadikan tanganmu terbelenggu ke lehermu dan janganlah engkau terlalu mengulurkannya, karena itu menjadikanmu duduk tercela dan tidak memiliki kemampuan.*

Jika Allah memuji sikap hemat, maka sudah tentu sikap boros dicela Allah. Allah memasukkan orang yang boros itu termasuk kelompok syetan yang berada dalam kesesatan yang nyata (Al-Qur'an, Al-Isra' (17): 27).



## BAB VII. Himpunan

*Himpunan* adalah kumpulan obyek yang didefinisikan dengan jelas dan dapat dibeda-bedakan. Himpunan dilambangkan dengan pasangan kurung kurawal { } dan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital (besar), seperti A, B, C,.... anggota himpunan ditulis dengan lambang  $\in$ , bukan anggota himpunan dengan lambang  $\notin$ .

Syarat tertentu dan jelas dalam menentukan himpunan, dapat membedakan obyek yang merupakan anggota himpunan dan obyek yang bukan anggota himpunan. Himpunan yang mempunyai syarat tertentu dan jelas sehingga kita dapat menentukan obyek mana yang menjadi anggota himpunan dan obyek mana yang bukan anggota himpunan disebut himpunan yang terdefinisi dengan baik (*well defined*).

Contoh bukan himpunan:

- ✚ Kumpulan orang-orang yang berkepribadian menarik di kelasku.
- ✚ Kumpulan mata kuliah penting pada semester ini.
- ✚ Kumpulan dosen-dosen terbaik di jurusanku.
- ✚ Kumpulan orang-orang sehat di Jurusan Matematika

Contoh Himpunan:

- ✚ Himpunan bilangan 1, 2, dan 3.
- ✚ Himpunan konsonan dalam abjad.
- ✚ Himpunan penyelesaian persamaan  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .



- ✚ Himpunan negara-negara Uni Eropa.
- ✚ Himpunan binatang berkaki empat.

### A. Penulisan Himpunan

Himpunan dapat ditulis dengan 2 cara yaitu cara pendaftaran dan cara pencirian.

#### 1. Cara pendaftaran

Dengan cara pendaftaran unsur himpunan ditulis satu persatu atau dengan cara didaftar.

Contoh:

$$1) \mathbf{A = \{a, i, u, e, o\}}$$

$$2) \mathbf{B = \{1,2,3,4,5\}}$$

Dalam statistik penulisan pada contoh 2 menghasilkan data diskrit.

#### 2. Cara pencirian

Dengan cara pencirian, unsur-unsur himpunan ditulis dengan menyebutkan sifat-sifat atau ciri-ciri unsur himpunan tersebut

Contoh:

$$1) \mathbf{A = \{X: x \text{ huruf hidup}\}}$$

$$2) \mathbf{B = \{X: 1 \leq x \leq 2\}}$$

Dalam statistik, cara penulisan seperti contoh 2) menghasilkan data kontinu atau variabel kontinu.

#### 3. Dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan

Contoh:

$$1) P : \{x \mid x \text{ adalah vokal dalam abjad latin}\}.$$

$$2) Q : \{x \mid x \text{ adalah bilangan asli ganjil}\}.$$

Jika  $x$  adalah anggota himpunan  $A$ , berarti  $A$  mempunyai  $x$  sebagai salah satu anggotanya dan dapat ditulis:  $x \in A$  (dibaca

$x$  anggota  $A$  atau  $x$  elemen  $A$ ). Sebaliknya jika  $x$  bukan anggota himpunan  $A$ , berarti  $A$  tidak mempunyai  $x$  sebagai (salah satu) anggotanya maka ditulis: sebagai  $x \notin A$  (dibaca:  $x$  bukan anggota  $A$ , atau  $x$  bukan elemen  $A$ )

Contoh:

- $P : \{a, i, e, o, u\}$ . Maka  $a \in P, b \notin P, e \in P$
- $Q : \{1, 3, 5, 7, 9\}$ . Maka  $3 \in Q, 6 \notin Q, 8 \notin Q$

## B. Macam-macam Himpunan

### 1. Himpunan Berhingga

*Himpunan berhingga ( finite set ) yaitu himpunan yang jumlah elemennya berhingga.*

Contoh 1:

$A = \{ x \mid x \text{ adalah 4 bilangan genap pertama} \} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

$B = \{ x \mid 2 < x < 10, x = \text{bilangan ganjil} \} = \{ 3, 7, 9 \}$

Contoh 2:

- a. Ditetapkan himpunan  $H =$  himpunan bilangan pada jam dua belasan. Maka  $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  adalah himpunan finit, karena proses membilang kita akan berhenti.
- b. Himpunan  $I =$  himpunan bilangan asli genap merupakan himpunan infinit, karena jika kita membilang banyak anggota himpunan  $= \{2, 4, 6, \dots\}$ , proses itu tidak akan pernah berhenti.
- c. Himpunan  $J =$  himpunan pasir di gerobak adalah himpunan finit, karena proses membilang banyak

anggota himpunan J, walaupun sukar, pada suatu saat akan berhenti.

## 2. Himpunan Tak Berhingga

*Himpunan tak berhingga ( infinite set ), yaitu himpunan yang jumlah elemennya tidak berhingga.*

Contoh:

$$C = \{ x \mid x \text{ adalah bilangan ganjil} > 1 \} = \{ 3, 7, 9, 11 \dots \}$$

## 3. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat seluruh objek yang dibicarakan atau himpunan yang menjadi objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan dengan S atau U.

Contoh:

1)  $S = U = \{a, b, c, \dots\}$

2)  $S = U = \{X: x \text{ bilangan asli}\}$

## 4. Himpunan Kosong

*Himpunan kosong* adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Himpunan kosong dilambangkan dengan  $\Phi$  atau  $\{ \}$ .

Contoh:

a)  $(\exists x) (\forall y) \rightarrow x + y = 0, x, y \in \text{Bulat}$

- b) A adalah himpunan manusia di bumi yang tingginya lebih dari tiga meter. Sepanjang pengetahuan kita, tidak ada manusia di bumi yang tingginya lebih dari tiga meter. Oleh karena itu,  $A = \Phi$
- c)  $B = \{x / x^2 = -1, x \text{ bilangan nyata}\}$ . Maka  $B = \{\}$

## 5. Himpunan Sama

*Himpunan sama*, yaitu himpunan yang memiliki elemen-elemen yang sama, walaupun urutannya berbeda.

Contoh:

Jika  $F = \{ 6, 7, 8, 9 \}$  dan  $G = \{ 9, 7, 6, 8 \}$  maka  $F = G$

## 6. Himpunan Ekuivalen

*Himpunan Ekuivalen ( kesamaan 2 himpunan )*, yaitu himpunan yang memiliki jumlah elemen/kardinalitas yang sama.

Contoh:

Jika  $H = \{ 2, 3, 4, 5 \}$  dan  $I = \{ h, l, j, k \}$  maka  $H \sim I$  karena  $n(H) = n(I) = 4$

## 7. Himpunan Bagian

*Himpunan bagian* adalah himpunan yang menjadi bagian dari himpunan lain. Himpunan A merupakan bagian dari himpunan B jika setiap unsur A merupakan unsur B atau B memuat A. Himpunan bagian dinyatakan dengan  $\subset$ ,  $A \subset B$ . Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan dengan n unsur adalah  $2^n$

Contoh Soal:

Jika diketahui:  $A = \{1,2,3\}$ , tentukan banyaknya himpunan bagian dari A dan tuliskan himpunan-himpunan bagian tersebut!

Jawab:

- ✓ Banyaknya himpunan bagian A adalah  $2^3 = 8$
- ✓ Himpunan-himpunan bagian itu adalah :  
 **$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$**

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari semua himpunan. Dalam statistik, himpunan bagian merupakan sampel.

8. Himpunan Saling Lepas

*Himpunan saling lepas / asing / disjoint*, yaitu himpunan yang elemen-elemennya berbeda.

Contoh:

Jika  $L = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$  dan  $M = \{ 15, 16, 17, 18, 19 \}$  maka  $L \cap M = \emptyset$ .

9. Himpunan Komplemen



*Himpunan komplemen* adalah himpunan semua unsur yang tidak termasuk dalam himpunan yang diberikan. Jika himpunannya adalah  $A$  maka himpunan komplemennya dilambangkan  $A^c$  atau  $A'$  atau  $\bar{A}$ .

Contoh:

Jika diketahui:

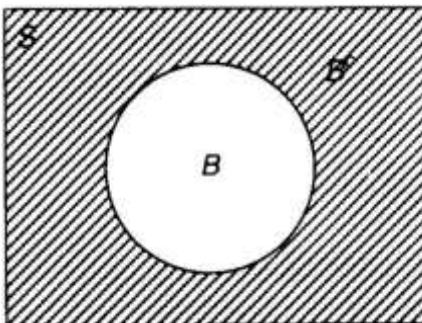
$$S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$B = \{2,4,6\}$$

Tentukan  $B^c$ !

Jawab:

$$B^c = \{1,3,5,7\}$$



$B^c$  = daerah yang diarsir

Gambar 1.1 Diagram Venn Himpunan  $B^c$

## 10. Himpunan Keluarga

*Himpunan Keluarga / Set of Set*, yaitu himpunan yang elemennya berupa himpunan.

Contoh:

$T = \{\{2,3\}, \{1,0\}, \{0,4,7\}\} \dots\dots \Leftrightarrow$  Himpunan keluarga

$U = \{\{2,3\}, 5, 7, \{0,4,7\}\} \dots\dots \Leftrightarrow$  Bukan Himpunan Keluarga

### C. Operasi Himpunan

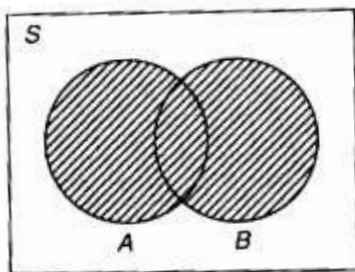
#### 1. Operasi Gabungan

Gabungan dari himpunan a dan himpunan B adalah semua unsur yang termasuk di dalam A atau di dalam B atau di dalam A dan B sekaligus. Gabungan dari himpunan A dan himpunan B dilambangkan  **$A \cup B$**  atau  $A + B$ .

Dituliskan :

$$A \cup B = \{x: x \in A, x \in B, \text{ atau } x \in AB\}$$

Diagram Vennnya:



$A \cup B$  daerah yang diarsir

Gambar 1.2 Diagram Venn dari  $A \cup B$

Contoh soal:

Jika diketahui:  $S = \{x: 0 \leq x \leq 10\}$

$P = \{2,3,5,7\}$

$G = \{2,4,6,8,10\}$

Tentukan  $P \cup G$ !

Jawab:

$P \cup G = \{2,3,4,5,6,7,8,10\}$

## 2. Operasi Irisan

*Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan semua unsur yang termasuk di dalam A dan di dalam B. Irisan dari himpunan A dan himpunan B dilambangkan  $A \cap B$  atau AB.*

dan dituliskan:

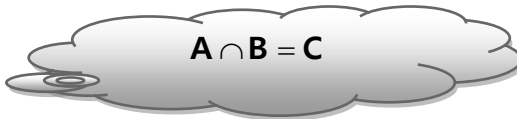
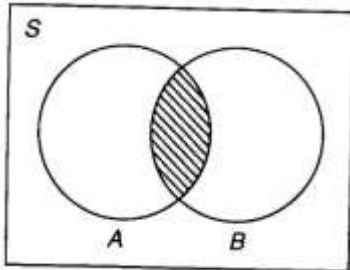


Diagram Vennnya:



$A \cap B$  daerah yang diarsir

Gambar 1.3 Diagram Venn dari  $A \cap B$

Contoh soal:



Jika diketahui:  $S = \{x: 2 \leq x \leq 8\}$   
 $P = \{2,3,5,7\}$   
 $A = \{2,3,4,6\}$

Tentukan  $P \cap A$ ?

Jawab:

$$P \cap A = \{2,3\}$$

### 3. Operasi Selisih

Selisih himpunan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan semua unsur  $A$  yang tidak termasuk di dalam  $B$ . Selisih himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  dilambangkan  $A - B$  atau  $A \cap B^c$ .

Dituliskan:

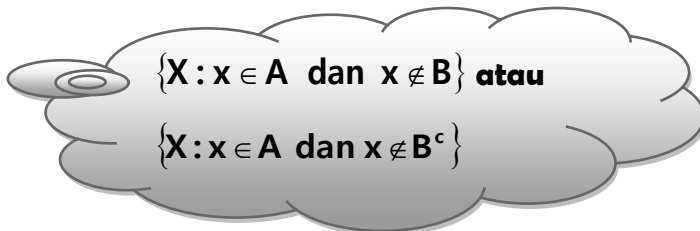
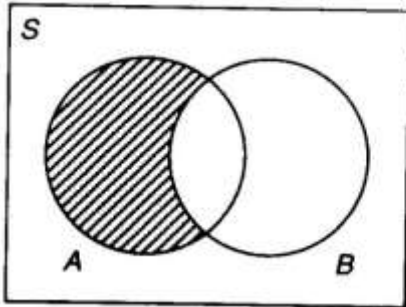

$$\{x: x \in A \text{ dan } x \notin B\} \text{ atau}$$
$$\{x: x \in A \text{ dan } x \notin B^c\}$$

Diagram Vennya:





$A - B$  daerah yang diarsir

Gambar 1.4 Diagram Venn dari  $A - B$  atau  $A \cap B^c$

Contoh soal:

Jika diketahui:  $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$   
 $P = \{2,3,5,7\}$   
 $G = \{2,4,6,8\}$

Tentukan  $P - G$ !

Jawab:

$$P - G = \{3,5,7\}$$

#### D. Relasi antara Himpunan- Himpunan

##### 1. Himpunan Bagian (Subset)

Himpunan A disebut *himpunan bagian (subset)* dari himpunan B, jika setiap anggota himpunan A juga merupakan anggota B.

Relasi himpunan bagian dinyatakan dengan notasi  $A \subset B$  (dibaca A "himpunan bagian" atau "subset" dari B). Kata "jika" pada defenisi di atas, juga berarti "jika dan hanya jika".

Contoh:



- a.  $A = \{5, 7, 9\}$  adalah himpunan bagian dari  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  karena 5, 7, 9 yang merupakan anggota A juga menjadi anggota B. Maka dapat ditulis  $A \subset B$
- b. Diketahui  $M = \{a, i, o, e\}$  dan  $N = \{i, a, e, o\}$ . Karena  $a, i, o, e$  yang menjadi anggota M juga menjadi anggota N, maka dapat ditulis  $M \subset N$ .
- c. Diketahui  $G = \{\text{bilangan bulat genap}\}$  dan  $B = \{\text{bilangan bulat}\}$ . Maka  $G \subset B$ .

*Ada beberapa pendapat yang membedakan antara subset dan proper subset (himpunan bagian murni). Proper subset, seperti contoh berikut: B adalah proper subset (himpunan bagian murni) dari A jika dan hanya jika  $B \subset A$  dan  $B \neq A$ . Dalam buku ini hanya digunakan satu istilah saja, yaitu subset dengan pengertian di atas.*

A subset B dapat juga ditulis sebagai  $B \supset A$ , dibaca B superset A atau B memuat A. Jika A bukan subset B, maka ditulis  $A \not\subset B$ .  
Catatan:

1.  $\emptyset$  subset dari setiap himpunan (himpunan kosong adalah himpunan bagian dari semua himpunan)
2. Jika himpunan A bukan subset himpunan B ( $A \not\subset B$ ) maka ada (paling sedikit satu) anggota himpunan A yang bukan anggota himpunan B.

Dua himpunan A dan B dikatakan dapat dibandingkan (*comparable*) jika  $A \subset B$  atau  $B \subset A$ .



## 2. Himpunan yang Beririsan (Berpotongan)

Dua himpunan A dan himpunan B dikatakan berpotongan jika dan hanya jika ada anggota himpunan A yang menjadi anggota himpunan B atau sebaliknya.

Contoh:

- a)  $M = \{3, 4, 5, 6\}$  dan  $N = \{2, 5, 8\}$  adalah dua himpunan yang berpotongan, karena ada anggota M yaitu 5 yang menjadi anggota N.
- b) Ditetapkan  $X : \{x / x^2 + 3x + 2 = 0\}$  dan  $Y : \{x / x^2 - x - 6 = 0\}$ . Himpunan X dan himpunan Y berpotongan, karena  $X = \{-1, -2\}$  dan  $Y = \{3, -2\}$ , ada anggota himpunan X yang juga menjadi anggota himpunan Y, yaitu -2.

Catatan:

Dua himpunan yang “berpotongan” sebagai dua himpunan yang “bersekutu”. Dalam hal ini anggota yang sama dari kedua himpunan itu disebut anggota persekutuan kedua himpunan itu.

## 3. Himpunan yang Lepas

Dua himpunan A dan himpunan B dikatakan lepas (ditulis  $A // B$ ), jika dan hanya jika kedua himpunan itu tidak kosong dan tidak mempunyai elemen yang sama dari keduanya.

Contoh:

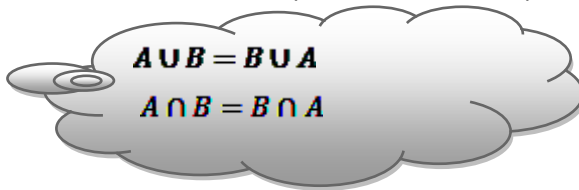
- a)  $M$  : himpunan bilangan bulat positif dan  $N$  : himpunan bilangan negatif merupakan dua himpunan

yang saling lepas, karena kedua himpunan itu tidak mempunyai elemen yang sama.

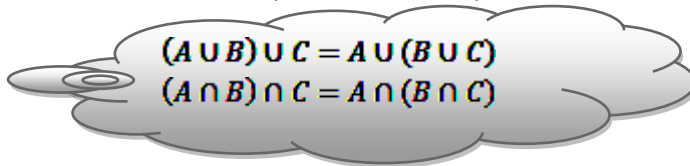
- b) Ditetukan  $V = \{1, 3, 5\}$  dan  $W = \{2, 3, 4\}$ , Maka  $V$  dan  $W$  tidak saling lepas, karena kedua himpunan itu mempunyai anggota persekutuan, yaitu 3.

#### E. Beberapa Aturan dalam Himpunan

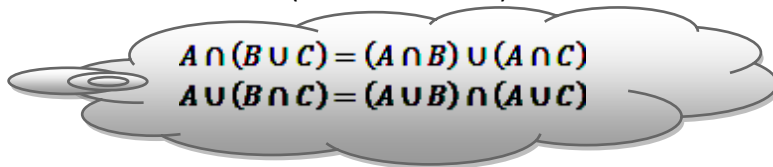
##### 1. Hukum komutatif (commutative law)


$$\begin{aligned}A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A\end{aligned}$$

##### 2. Hukum asosiatif (associative law)


$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

##### 3. Hukum distributif (distributive law)


$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

##### 4. Hukum identitas (identity law)

$$A \cap S = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

5. Hukum komplementasi (complementation law)

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = S$$

6.  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$

$n(A)$  = bilangan kardinal himpunan A  
 = jumlah anggota himpunan A

Contoh soal:

Suatu kelas yang jumlah mahasiswanya 70 kelas, 50 orang diantaranya senang statistika, 40 orang senang matematika, serta 30 orang senang satatistika dan matematika.

- Berapa orang yang tidak senang statistika dan matematika?
- Gambarkan diagram vennnya!

Jawab:



a.  $n(S) = 70$  orang,  $n(S_r) = 50$  orang,  $n(M) = 40$  orang,

$n(S_r \cap M) = 30$  orang.

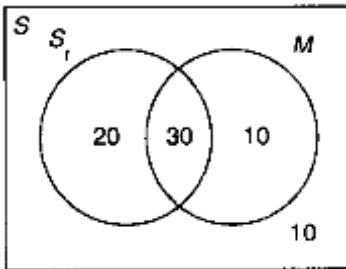
$$n(S_r \cup M) = n(S_r) + n(M) - n(S_r \cap M)$$

$$= 50 + 40 - 30 = 60 \text{ orang}$$

$$n(S_r \cup M)^c = n(S) - n(S_r \cup M)$$

$$= 70 - 60 = 10 \text{ orang}$$

b. Diagram vennnya



Gambar 1.5 Diagram Venn dari  $n(S_r \cup M)^c$

## BAB VIII. Aksiomatika

Walaupun banyak sekali definisi tentang matematika, bahkan The Liang Gie berhasil mengumpulkan lebih dari 127 definisi yang berbeda tentang matematika, tetapi tidak ada satu definisipun yang bisa disepakati oleh semua pihak. Namun, berdasarkan definisi-definisi yang diajukan oleh para ahli, Soedjadi dan Masriyah (1994) dapat menarik empat ciri pokok yang sama tentang matematika. Keempat ciri pokok matematika tersebut merupakan karakteristik matematika, adalah:

- 1) matematika memiliki objek kajian yang abstrak,
- 2) matematika mendasarkan diri pada kesepakatan-kesepakatan,
- 3) matematika sepenuhnya menggunakan pola pikir deduktif, dan
- 4) matematika dijiwai dengan kebenaran konsisten yaitu kebenaran yang didahului oleh kebenaran-kebenaran sebelumnya.

Dalam penerapannya pun karakteristik antara matematika dan pendidikan matematika dibedakan, sebagai berikut:

| Karakteristik matematika  | Karakteristik pendidikan matematika   |
|---|---|
|  Objek Abstrak |  Objek Abstrak dan kongkrit<br> Pola Pikir Deduktif dan |



|   |  |
|---|--|
| ✚ Pola Pikir Deduktif                             | induktif   |
| ✚ Kebenaran konsisten                             | ✚ Kebenaran konsisten dan korelasional           |
| ✚ Bertumpu pada kesepakatan                       | ✚ Bertumpu pada kesepakatan                      |
| ✚ Simbol kosong dari arti (sebelum masuk semesta) | ✚ Simbol kosong dari arti dan juga berarti       |
| ✚ Taat kepada semesta                             | ✚ Taat asas dan untuk membedakan tingkat sekolah |

✚ Misalnya “bilangan dua”.

Mata kita dua. Telinga kita dua. Sepeda kita dua. Lalu, apakah bilangan dua itu? Jelas, bilangan dua adalah objek abstrak dan “2” disepakati merupakan lambang atau simbol “bilangan dua”. Sedangkan 2, tanpa tanda petik disepakati untuk dimaknai sebagai *bilangan dua*.

Perhatikan ilustrasi berikut.

- $\Delta\Delta + \Delta = \Delta\Delta\Delta$  (salah,  $\Delta$  adalah simbol, jadi tidak dapat dijumlahkan).
- $22 + 2 = 222$  (salah, sebab bilangan dua, dianggap simbol).
- $22 + 2 = 24$  (benar, operasi + memang berlaku pada bilangan).
- “22” + “2”  $\neq$  “24” (benar, “2” menyatakan simbol, bukan bilangan dua).

✚ Apakah “titik” itu? Titik tidak bisa didefinisikan, titik juga objek abstrak dalam matematika/geometri. Hall dan Stevens (1919) menulis bahwa “A point is a position. It has no size, length, width, or thickness, and it is infinitely

small.” Jika titik sulit digambar (sebab: and point is infinitely small), apalagi garis, segitiga, atau kubus. Perhatikan lambang atau simbol-simbol berikut: “=”, “2”, “ $\forall$ ”, atau “ $\Delta$ ”. Simbol-simbol tersebut merupakan kesepakatan-kesepakatan dalam matematika. Jika suatu definisi sudah diterima, maka definisi tersebut merupakan kesepakatan yang akan diterima.

- ✚ Matematika, berpola pikir deduktif. Artinya, pola pikir matematika berangkat dari hal yang umum, menuju ke hal-hal yang khusus.

Sistem deduktif dalam matematika, dikenal 2 istilah penting, yaitu istilah “PENGERTIAN” dan istilah “PERNYATAAN.

Pengertian dibedakan atas 2 hal, yaitu

1) *Pengertian Pangkal*

***Pengertian pangkal*** adalah unsur atau elemen dalam matematika yang harus kita terima sebagai fakta tanpa harus didefinisikan (*undefined terms*).

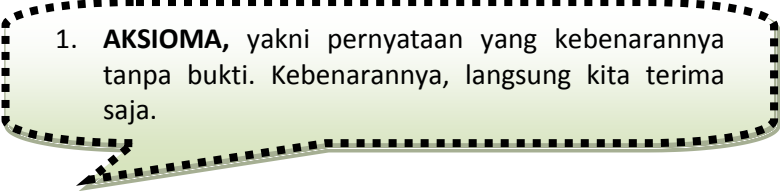
Contoh:

pengertian bilangan DUA, pengertian TITIK, pengertian GARIS, pengertian BIDANG, dan sebagainya.

Jadi, TITIK cukup digambar dan tidak perlu didefinisikan. Dapatkah kita mendefinisikan TITIK sebagai: “Titik adalah *sesuatu* yang tidak punya panjang, tidak punya lebar, tidak punya ketebalan, dan kecil tak berhingga”? Lalu, jika

definisi itu kita terima, pastilah akan muncul pertanyaan baru lagi. Apakah SESUATU itu? Bagaimana menggambar titik tersebut jika titik tersebut tidak memiliki panjang, lebar, maupun ketebalan? TITIK memang objek abstrak dalam matematika sehingga seharusnya memang tidak bisa digambar. Jadi, konsep tentang titik, garis, atau bidang haruslah kita terima sebagai sebuah fakta dalam matematika. Pengertian pangkal amat diperlukan agar tidak terjadi "berputar-putar dalam dalam pendefinisian".

Beberapa pengertian pangkal dalam matematika, antara lain:

- 
1. **AKSIOMA**, yakni pernyataan yang kebenarannya tanpa bukti. Kebenarannya, langsung kita terima saja.

Contoh:

Melalui 2 buah titik hanya dapat dibuat tepat sebuah garis.

Aksioma dibedakan atas 2 jenis, yaitu:

- 1) Pernyataan benar yang diterima sebagai kebenaran tanpa bukti (*self evident truth*).

Contoh:

Melalui dua buah titik dapat dibuat tepat sebuah garis.

- 2) Pernyataan yang disepakati kebenarannya dan dapat menghasilkan pernyataan-pernyataan lain yang benar secara logik (*non self evident truth*).

Contoh:

Suatu himpunan tak kosong  $G$  dengan operasi biner “ ” disebut Grup jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.

- 1) Tertutup,  $(\forall a, b \in G) (\exists c \in G) aob = c$
- 2) Asosiatif,  $(\forall a, b, c \in G) (aob)oc = ao(boc)$
- 3) Ada elemen identitas (ditulis dengan  $e$ ),  
 $(\exists c \in G) (\forall a \in G) eoa = aoe = a$
- 4) Tiap elemen  $G$  memiliki invers dalam  $G$ ,  
 $(\forall a \in G) (\exists a^{-1} \in G) a^{-1}oa = aoa^{-1} = e$

Sebagai suatu sistem, kumpulan aksioma harus memiliki syarat:

- 1) Konsisten, artinya aksioma tersebut bernilai benar.
- 2) Independen, artinya antara aksioma satu dengan aksioma yang lain saling lepas. Aksioma yang satu bukan menjadi syarat keberadaan aksioma yang lain.
- 3) Lengkap, artinya aksioma satu sama lain saling melengkapi untuk pembuktian teorema-teorema berikutnya.
- 4) Ekonomis, artinya bahwa kalimat pembentuknya menggunakan kata-kata yang singkat, efektif, jelas, dan tidak tumpang tindih.

2. Teorema, dalil, rumus, atau sifat. Kebenaran sebuah teorema atau sebuah sifat, haruslah dibuktikan.

Karakteristik matematika ke-empat, matematika dijiwai dengan kebenaran konsisten yaitu kebenaran yang didahului



oleh kebenaran-kebenaran sebelumnya. Dengan karakteristik ini, maka bukti deduktif dalam matematika harus urut. Untuk membuktikan Teorema 3, tidak boleh menggunakan Teorema 4 atau 5. Teorema 3 harus dibuktikan dengan menggunakan teorema-teorema atau aksioma-aksioma, atau definisi sebelumnya. Untuk membuktikan Teorema 3 ini, maka kebenaran Teorema 1 dan 2 harus sudah terbukti.

3. **Lema:** adalah teorema yang pemakaiannya amat terbatas. Biasanya dimunculkan hanya untuk keperluan terbatas, yakni untuk membuktikan suatu teorema tertentu.

Ada yang menyebut, lema sebagai “setengah teorema”. Penulisan lema, dapat dituliskan sebelum teorema yang membutuhkannya, atau dituliskan di tengah-tengah pembuktian teorema utamanya.

Contoh:

Dikutip dari *Introduction to Real Analysis*, Robert G. Bartle (1992:101),

3.5.2 *Lemma.* If  $X = (x_n)$  is a convergent sequence of real numbers, then  $X$  is a Cauchy sequence.  $n \times$

3.5.3 *Lemma:* A Cauchy sequence of real numbers is bounded.

3.5.4 *Cauchy Convergence Criterion.* A sequence of real numbers is convergent if and only if it is a Cauchy sequence

Lemma 3.5.2 dan 3.5.3 sangat diperlukan dan hanya diperlukan untuk membuktikan Teorema 3.5.4.

4. Korolari: suatu teorema yang muncul sebagai akibat dari teorema sebelumnya.

Contoh:

- 1) Theorem. If  $ab > 0$ , then either (i)  $a > 0$  and  $b > 0$ , or (ii)  $a < 0$  and  $b < 0$ .
- 2) Corollary. If  $ab < 0$ , then either (i)  $a < 0$  and  $b > 0$ , or (ii)  $a > 0$  and  $b < 0$ .

Jadi, urutan penyajian matematika akan dimulai dengan Pengertian Pangkal (*undefined terms*), diikuti dengan aksioma-aksioma, definisi, dan selanjutnya diikuti dengan teorema-teorema (juga lema atau korolari). Harus urut dan tidak boleh tumpang tindih.

Karena bukti teorema didahului oleh sistem aksioma, maka aksioma ini merupakan landasan berpikir matematika. Berdasarkan alasan inilah, matematika disebut sebagai sistem deduktif-aksiomatik. Herman Hudoyo (1988) mengemukakan bahwa aksioma-aksioma yang digunakan untuk menyusun sistem matematika akan menentukan bentuk sistem matematika itu sendiri.

- 2) *Pengertian bukan Pangkal* dalam matematika, dikenal sebagai *definisi*.

Definisi adalah ungkapan yang diperlukan untuk membatasi suatu konsep dalam matematika.

Contoh:

Trapesium adalah segiempat yang mempunyai tepat sepasang sisi sejajar.

Jadi trapesium merupakan salah satu term/istilah dalam matematika yang perlu dan dapat didefinisikan (*defined terms*).

Definisi dalam matematika amat dibutuhkan, untuk menghindari dari peristiwa "berputar-putar dalam pembuktian". Definisi digunakan untuk mengklasifikasikan mana objek yang merupakan contoh dan mana objek yang bukan contoh.

Definisi dibedakan atas 3 jenis:

**1) Definisi Analitik,**

yaitu definisi yang menyebutkan genus proksimum dan diferensia spesifik.

Contoh:

Persegipanjang adalah jajargenjang yang salah satu sudutnya  $90^{\circ}$ .

Genus proksimum (keluarga terdekat): Jajargenjang.

Diferensia spesifik (perbedaan yang spesifik): Salah satu sudutnya  $90^{\circ}$ .

**2) Definisi Genetik,**

yaitu definisi yang menunjukkan terjadinya konsep itu.

Contoh:

Jaring-jaring limas adalah bangun yang terjadi bila suatu limas dipotong menurut rusuk-rusuk tegaknya dan bidang-bidang sisi tegaknya direbahkan ke arah luar sampai ke bidang yang memuat bidang alasnya.

3) **Definisi dalam bentuk rumus,**  
dinyatakan dalam notasi-notasi matematika.

Contoh:

Definisi  $n$  faktorial yang langsung ditulis:

$n! = n(n - 1)!$  dilengkapi dengan  $0! = 1! = 1$ .

Unsur-unsur Definisi:

- (1) latar belakang,
- (2) genus,
- (3) istilah (konsep yang didefinisikan), dan
- (4) atribut.

Contoh:

*Segitiga samasisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.*

Latar belakangnya: bangun datar, genusnya: segitiga, konsep yang didefinisikan: segitiga samasisi, atributnya: ketiga sisinya sama panjang.

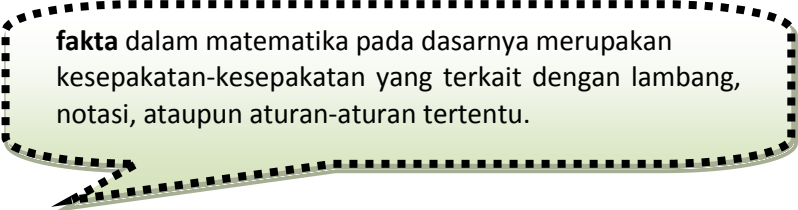
1. Obyek matematika



Ada 2 obyek dalam matematika yang sering kita pelajari, antara lain:

1) Langsung: fakta, skill, prinsip dan konsep

Untuk memahami perbedaan fakta dan konsep, coba bagaimana jika anda diminta menentukan hasil dari  $10 \times 5 + 2$ ? Berapakah hasil yang tepat? 70 atukah 52? Permasalahan ini terkadang menimbulkan kecacauan hasil di kalangan anak didik kita di tingkat dasar. Untuk menghindari kecacauan hasil, maka diperlukanlah suatu konvensi atau kesepakatan-kesepakatan terkait dengan aturan tertentu. Lantas, berapa hasil yang tepat? Tentu saja hasilnya adalah 52.



**fakta** dalam matematika pada dasarnya merupakan kesepakatan-kesepakatan yang terkait dengan lambang, notasi, ataupun aturan-aturan tertentu.

Contoh:

- ✚ lambang “1” digunakan untuk menyatakan banyaknya sesuatu yang tunggal.
- ✚ Kerancuan yang masih saja terjadi adalah mengenai lambang “0”. Bagaimana kita menyebut lambang tersebut? “Nol” atukah “kosong”? Mudah-mudahan cobalah anda mengadakan semacam riset kecil-kecilan, dengan meminta beberapa rekan anda untuk menyebutkan nomor berikut 085645048027? Apa jawaban rekan-rekan anda? Sebagian diantara mereka akan menjawab “kosong delapan lima enam ....delapan kosong dua tujuh”.

Sedangkan, sebagian yang lain menjawab “nol delapan lima enam ... delapan nol dua tujuh”. Lantas, mana yang tepat? Jawaban yang tepat adalah jawaban yang kedua, yakni “nol delapan lima enam ... delapan nol dua tujuh”. Tentu saja yang tepat untuk lambang “0” adalah “nol”. Sebab, “kosong” digunakan untuk menyebutkan suatu keadaan/sifat. Sebagai contoh, kelas dalam keadaan kosong jika memang tidak ada seorang pun dan tidak ada apapun di dalam kelas tersebut. Contoh lain, dalam materi himpunan, kita kenal istilah Himpunan Kosong ... sebab himpunan tersebut tidak mempunyai anggota. Dalam hal ini, kita katakan bahwa jumlah anggota himpunan tersebut adalah nol bukan kosong.

**Konsep** adalah suatu ide abstrak yang yang memungkinkan seseorang mengklasifikasikan suatu objek dan menerangkan apakah objek tersebut merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut.

Contoh:

“Kubus” merupakan salah satu contoh dari konsep. Seorang siswa dikatakan telah menguasai konsep “kubus” jika ia mampu menentukan bangun-bangun ruang yang termasuk kubus dan bukan kubus.

Berdasarkan pemahaman di atas, maka suatu konsep bukanlah untuk dihafal tetapi untuk dipahami maknanya. Secara umum, ada empat cara mengajarkan konsep, yaitu:

1. Membandingkan obyek matematika yang termasuk konsep dan yang bukan konsep.

Contoh:

pada konsep “balok”, kardus merupakan contoh objek yang berbentuk “balok” sedangkan kaleng susu bukan/tidak termasuk “balok”.

2. Pendekatan deduktif, artinya proses pembelajaran dimulai dari definisi dan diikuti contoh-contoh dan yang bukan contoh.

Contoh:

pada konsep “persamaan linier”. Mula-mula kita paparkan definisi “persamaan linier”, yaitu persamaan yang derajat/pangkat tertinggi variabelnya adalah satu. Selanjutnya kita tuliskan beberapa bentuk persamaan dan meminta siswa mengklasifikasikannya, apakah persamaan tersebut merupakan persamaan linier atau bukan.

3. Pendekatan induktif, artinya proses pembelajaran diawali dengan contoh-contoh dan diikuti pemaparan definisi yang tepat berdasarkan contoh-contoh tersebut.

Contoh:

kita ingin memahami konsep “pernyataan”. Awalnya kita paparkan beberapa bentuk kalimat dan siswa diminta menentukan apakah kalimat-kalimat tersebut benar atau salah.

- Jakarta adalah Ibukota Negara Republik Indonesia. (benar)
- Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil. (salah)

- Subhanallah ... cantik sekali gadis itu. (tidak bisa ditentukan benar atau salahnya, sebab 'cantik' itu relatif)
- $x + 2 = 5$  (tidak bisa ditentukan benar atau salahnya, karena masih bergantung pada nilai  $x$ )

Berdasarkan contoh-contoh tersebut, barulah kita definisikan bahwa yang dimaksud dengan “pernyataan” adalah kalimat yang dapat ditentukan benar atau salahnya secara pasti. Sedangkan kalimat yang tidak bisa ditentukan benar atau salahnya, disebut “kalimat terbuka”.

**Keterampilan** adalah operasi atau prosedur yang diharapkan dapat dikuasai siswa secara cepat dan tepat.

Siswa dikatakan menguasai keterampilan apabila ia dapat menunjukkan keterampilan tersebut secara tepat, dapat menyelesaikan berbagai jenis masalah yang memerlukan keterampilan tersebut, dan menerapkan keterampilan tersebut ke dalam berbagai situasi.

**Prinsip** adalah rangkaian beberapa konsep secara bersama-sama beserta hubungan (keterkaitan) antarkonsep tersebut

Siswa dikatakan menguasai prinsip apabila ia dapat mengidentifikasi konsep-konsep yang terkandung di dalam prinsip tersebut, menentukan hubungan antarkonsep, dan menerapkan prinsip tersebut ke dalam situasi tertentu.

Prinsip dapat berupa aksioma, teorema, maupun sifat.

Contoh:

Dalam segitiga siku- siku ABC berlaku bahwa kuadrat panjang sisi miring sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi- sisi siku-sikunya.

- 2) Tak langsung: pembuktian teorema, pemecahan masalah, transfer belajar, belajar bagaimana belajar, perkembangan intelektual, bekerja secara individu/kelompok, sikap positif.



## BAB IX. Logika

### B. Kalimat dan Pernyataan

**Kalimat** adalah rangkaian dari kata-kata

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

- 1) Pontianak berada di pulau Kalimantan.
- 2) Lima lebih dari 7.
- 3) Surabaya lebih jauh dari Jakarta.
- 4) Tujuh mencintai lima.
- 5) Kerjakan soal latihan dalam buku ini dengan baik!.
- 6) Bilangan asli yang kurang dari 5.
- 7) Mawar merah.
- 8) Di mana alamat rumahmu?.

Kalimat-kalimat di atas dapat Anda pahami dengan baik, kecuali kalimat 4), karena kalimat-kalimat tersebut bermakna atau berarti. Sedangkan kalimat 4) adalah kalimat yang tidak bermakna atau tidak berarti, karena tidak ada hubungan mencintai antar bilangan.

Sekarang perhatikan kalimat-kalimat yang bermakna, yaitu:

- 1) Leihitu ada di pulau Ambon.
- 2) Lima lebih dari 7.
- 3) Surabaya lebih jauh dari Jakarta.
- 4) Kerjakan soal latihan dalam buku ini dengan baik!.
- 5) Bilangan asli yang kurang dari 5.
- 6) Mawar merah.
- 7) Dimana alamat rumahmu?.

Tentunya Anda tahu bahwa:

- ✚ Kalimat 1) dan 6) adalah kalimat yang benar, karena sesuai dengan kenyataan Leihitu memang berada di pulau Ambon dan ada mawar yang berwarna merah.
- ✚ Kalimat 2) adalah kalimat yang salah, karena lima tidak lebih dari 7. Kalimat ini dapat diubah menjadi kalimat yang benar, yaitu: Lima kurang dari 7.
- ✚ Kalimat 3), 4), 5), dan 7) tidak dapat ditentukan benar atau salah. Benar atau salahnya kalimat 3) bergantung dari tempat dimana kalimat itu diucapkan. Jika kalimat itu diucapkan oleh orang yang berada di Medan, kalimat itu benar, tetapi kalimat itu salah jika diucapkan orang yang berada di Bandung.

Benar atau salahnya kalimat 5) bergantung pada bilangan asli tertentu.

Kalau bilangan asli pada kalimat itu diganti dengan bilangan 1, 2, 3, atau 4, maka kalimat tersebut menjadi benar. Tetapi bila bilangan asli pada kalimat itu diganti dengan 5, 6, 7,... (dan seterusnya), kalimat itu menjadi kalimat yang salah. Kalimat 4) tidak dapat ditentukan benar atau salahnya, karena kalimat tersebut adalah kalimat perintah.

Kalimat 7) juga tidak dapat ditentukan benar atau salah, karena kalimat tersebut kalimat tanya.

Kalimat yang dapat ditentukan benar atau salah disebut **pernyataan**.

Kalimat yang tidak dapat ditentukan benar atau salah **bukan pernyataan**.

Nilai benar atau salah dari suatu kalimat disebut **nilai kebenaran** kalimat tersebut.

Di atas dikatakan bahwa kalimat 3) dan 5) dapat diubah menjadi kalimat yang bernilai benar atau salah. Kalimat 3) dapat diubah menjadi kalimat yang benar atau salah dengan melihat tempat orang yang mengatakan kalimat tersebut. Kalimat 5) dapat diubah menjadi kalimat benar atau salah dengan mengganti bilangan asli dengan bilangan tertentu. Tempat orang yang mengatakan kalimat 3) dan bilangan asli di kalimat 5) dapat diubah-ubah sesuai dengan keinginan Anda.

Sesuatu yang berubah-ubah disebut **variabel**, atau **variabel** adalah lambang untuk menyatakan anggota suatu himpunan semesta.

Variabel seringkali dinyatakan dengan huruf-huruf akhir abjad ( $x, y, z$ ).



Kalimat yang memuat variabel disebut **kalimat terbuka**.

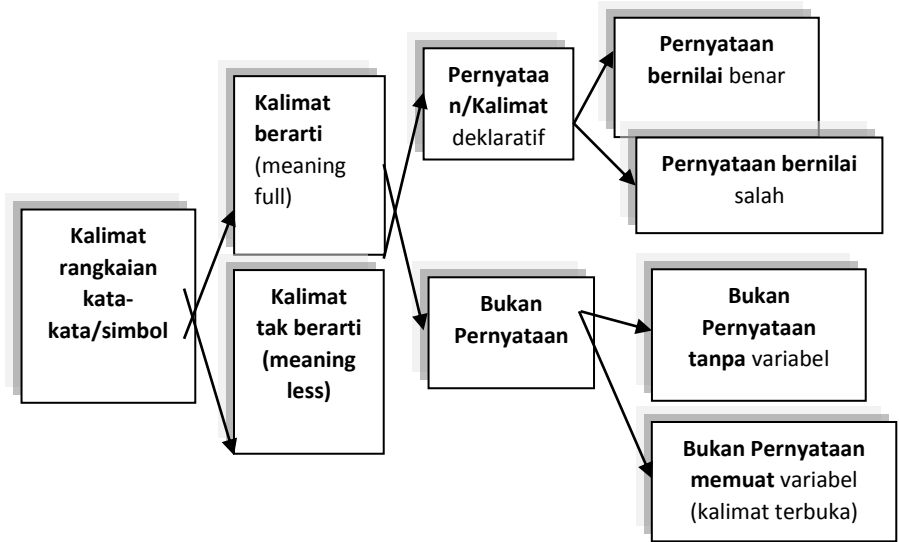
**konstanta**, yaitu sesuatu yang tetap, atau **konstanta** adalah lambang untuk menyatakan anggota tertentu dari himpunan semesta.

Contoh:

$ax + by = c$ .  $x$  dan  $y$  merupakan variabel dan  $a$ ,  $b$ ,  $c$  merupakan konstanta pada himpunan bilangan real.

Rangkuman

**Diagram: Pembagian Kalimat Matematika**



2. Ingkaran, Konjungsi, Disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi

Jika kalimat tunggal dihubungkan dengan menggunakan kata penghubung kalimat, maka kalimat tersebut menjadi kalimat majemuk atau tersusun. Adapun kata-kata penghubung kalimat itu ialah:

1. dan, yang dilambangkan “&” atau “ $\wedge$ ”. Contoh  $p \wedge q$  dibaca p dan q
2. atau, yang dilambangkan “ $\vee$ ”, mungkin juga  $\underline{\vee}$ . Contoh  $p \vee q$  dibaca p atau q
3. Apabila .....maka ..... dilambangkan: “ $\Rightarrow$ ” atau “ $\rightarrow$ ”. Contoh  $p \vee q$  dibaca jika p maka q

Pernyataan nomor 3 dapat juga dibaca:

- (a) q hanya jika p
  - (b) p mengakibatkan q
  - (c) Bilamana p maka q
  - (d) p syarat perlu untuk q
  - (e) q syarat cukup untuk p
4. Bilamana dan hanya bilamana dilambangkan: " $\Leftrightarrow$ " atau " $\leftrightarrow$ ". Contoh  $p \leftrightarrow q$  dibaca p jika dan hanya jika q atau jika p maka q dan jika q maka p.
5. Tidak, yaitu kalimat untuk mengingkari suatu kalimat, dilambangkan "-" yang diletakkan di atas simbol kalimat. Operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, beserta penggunaan masing-masing operator tersebut telah dipelajari dalam aritmetika

Demikian juga dalam Logika Elementer atau Logika Matematika akan dijumpai beberapa operasi yang memungkinkan penggabungan dua atau lebih pernyataan untuk memperoleh pernyataan yang baru, yang dinamakan pernyataan majemuk

Rangkaian pernyataan-pernyataan dinamakan **pernyataan majemuk** atau **kalimat majemuk**.

a. Ingkaran

Ingkaran dari suatu kalimat p, ditulis:  $\neg p$  atau  $\bar{p}$ .

Contoh 1:



Jika  $p$ : 'Husna rajin belajar', maka  $\neg p$ : 'Tidak benar bahwa Husna rajin belajar'.  $\neg p$  dapat pula berbunyi: 'Husna tidak rajin belajar'.

Nilai kebenaran dari suatu pernyataan  $p$  dan  $\neg p$  disajikan pada tabel berikut, yang disebut tabel kebenaran.

| $p$   | $\neg p$ |
|-------|----------|
| Benar | Salah    |
| Salah | Benar    |

Contoh 2:

$p$ : 'Ahmad berkacamata' (S), berarti  $p$  bernilai salah.

Karena menurut kenyataan, Ahmad tidak berkacamata, dengan demikian  $\neg p$  bernilai benar.

Hal ini disajikan sebagai:  $\neg p$ : 'Ahmad tidak berkacamata' (B).

Contoh 3:

Ingkaran dari: " $4 > 3$ " adalah bukan " $3 < 4$ " sebab, keduanya bernilai benar. Seharusnya:

Ingkaran dari " $4 > 3$ " adalah " $4 < 3$ " atau  $4 = 3$

Sesuai dengan definisi, ingkaran pernyataan benar ialah pernyataan salah.

Pada contoh 3 di atas, cukup mudah dimengerti, sebab " $4 > 3$ " adalah pasti benar, sedangkan  $4 < 3$  dan  $4 = 3$  adalah pasti salah. Apabila pada pernyataan itu belum dapat dipastikan bernilai benar atau salah, maka sulit menentukan ingkarannya.

Contoh 4:

Ingkaran " $x > y$ " ialah " $x < y$ " atau " $x = y$ " dapat disingkat " $x \leq y$ "

Mengapa? penjelasannya sebagai berikut

Jika " $x > y$ " misalnya benar, tentu cukup jelas bahwa ingkarannya " $x < y$ ", karena bernilai salah. Tetapi apabila " $x > y$ " ternyata bernilai salah, maka belumlah tentu " $x < y$ " benar, mengapa? Karena bisa saja " $x = y$ ". Dengan demikian jelaslah bahwa ingkaran " $x > y$ " ialah mungkin " $x < y$ " atau mungkin juga " $x = y$ " dapat disingkat bahwa ingkaran " $x > y$ " ialah " $x \leq y$ ".

b. Konjungsi

Dua kalimat yang dihubungkan dengan kata **dan**, merupakan kalimat majemuk yang disebut **konjungsi**.

Contoh:

p: Saya makan papeda.

q: Saya makan ikan.

Konjungsi dari p dan q dinyatakan sebagai:

$p \wedge q$ : Saya makan papeda ikan.

Berikut adalah tabel kebenaran untuk konjungsi.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| B | B | B            |
| B | S | S            |
| S | B | S            |

|   |   |   |
|---|---|---|
| S | S | S |
|---|---|---|

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran dari suatu konjungsi tidak bergantung pada ada tidaknya hubungan antara kedua atomnya, tetapi bergantung pada nilai kebenaran dari atom-atomnya.

Contoh:

'Ambon di Maluku dan 2 bilangan prima'. Kalimat itu merupakan kalimat yang benar, karena:

p: Ambon di Maluku (B).

q: 2 bilangan prima (B).

$p \wedge q$ : Ambon di Maluku dan 2 bilangan prima (B).

Dalam kehidupan sehari-hari konjungsi tidak selalu dihubungkan dengan kata dan, misal:

Yoga berambut lurus, sedangkan kakaknya berambut keriting.

Meskipun baru berumur 2 tahun, Ica sudah pandai bicara.

Cika anak yang sehat, walaupun badannya kecil.

Ali berbadan gemuk, tetapi dia susah makan.

c. Negasi Suatu Konjungsi

Tabel nilai dari pernyataan " $p \wedge q$ " atau tabel nilai konjungsi, telah diketahui bahwa konjungsi hanya bernilai benar, jika kedua pernyataan awalnya (komponennya) bernilai benar, yaitu pada baris pertama. Untuk jelasnya, perhatikanlah tabel nilai ini.



| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| B   | B   | B            |
| B   | S   | S            |
| S   | B   | S            |
| S   | S   | S            |

Jika

$p$  = "calon mahasiswa lulus tes matematika"

$q$  = "calon mahasiswa lulus tes Bahasa Inggris"

Syarat calon mahasiswa yang diterima diperguruan itu misalnya adalah mereka yang lulus tes Matematika dan tes Bahasa Inggris, berarti pernyataan " $p \wedge q$ " benar.

Kalau demikian ingkaran "yang diterima" tentu "tidak diterima". Berarti tidak " $p \wedge q$ " atau " $\neg p \vee \neg q$ ". Dalam hal ini calon mahasiswa yang bagaimana yang tidak diterima?

Tentu saja bagi calon mahasiswa yang "tidak lulus tes matematika" atau "tidak lulus tes Bahasa Inggris", yaitu pada baris-baris; 2, 3 atau 4 dari tabel nilai kebenaran konjungsi.

### Kesimpulan

Ingkaran dari pernyataan " $p \wedge q$ " dilambangkan: " $\overline{p \wedge q}$ " ialah " $\neg p \vee \neg q$ " (Dalil de' Morgan). Sesuai dengan Dalil de' Morgan pada Teori Himpunan, yaitu  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

Ingkaran atau negasi suatu konjungsi dengan menggunakan tabel nilai kebenaran yang yaitu,

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------|-------------------------|----------------------|
| B   | B   | S        | S        | B            | S                       | B                    |
| B   | S   | S        | B        | S            | B                       | B                    |
| S   | B   | B        | S        | S            | B                       | B                    |
| S   | S   | B        | B        | S            | B                       | B                    |



*Catatan:*

Nilai  $p$  dapat dipilih B S B S dan  $q$  dengan B B S S, yang penting konsisten.

Dengan demikian, ingkaran dari " $p \wedge q$ " yang dilambangkan " $\overline{p \wedge q}$ " bernilai "sama dengan" " $p \vee q$ " yaitu pada, kolom ke 6 dengan kolom ke 7. Perlu diketahui, bahwa dalam Logika Elementer atau Logika Matematika, tidak terdapat istilah "sama dengan" yang ada yaitu istilah "bernilai sama". Contoh, bukan pernyataan " $p$ " = pernyataan " $q$ ", melainkan pernyataan " $p$ " bernilai sama dengan pernyataan " $q$ ".

d. Disjungsi

Disjungsi eksklusif dari  $p$  dan  $q$  dinyatakan sebagai  $p \vee q$ .

Contoh:

Perhatikan kalimat:

'Uki siswa pandai atau rajin'.





Pada kalimat tersebut Anda dapat membuat dua tafsiran berikut:

- ❖ 'Uki siswa yang pandai', atau 'Uki siswa yang rajin', atau 'Uki siswa yang pandai dan rajin'.
- ❖ 'Uki siswa yang pandai', atau 'Uki siswa yang rajin', tetapi tidak keduanya.

Disjungsi inklusif dari  $p$  dan  $q$  dinyatakan sebagai  $p \vee q$ .

Tabel kebenaran dari disjungsi inklusif sebagai berikut:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| B   | B   | B          |
| B   | S   | B          |
| S   | B   | B          |
| S   | S   | S          |

Sekarang perhatikan kalimat: 'Ria di rumah atau di sekolah'.

Pada kalimat tersebut, Anda hanya dapat membuat tafsiran:

- ❖ 'Ria di rumah', atau 'Ria di sekolah', tetapi tidak keduanya.

Kalimat: 'Ria di rumah atau di sekolah' merupakan kalimat majemuk yang disebut disjungsi eksklusif.

Disjungsi eksklusif dari  $p$  dan  $q$  dinyatakan sebagai

$$p \underline{\vee} q$$

Tabel kebenaran dari disjungsi inklusif sebagai berikut:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| B   | B   | S          |
| B   | S   | B          |
| S   | B   | B          |
| S   | S   | S          |

e. Negasi suatu Disjungsi (Ingkaran suatu Alternasi)

Suatu disjungsi hanyalah bernilai salah, jika kedua pernyataan asalnya (kedua komponennya) bernilai salah, yakni pada baris keempat.

Dari penjelasan di atas, persyaratan diterima sebagai mahasiswa, yaitu calon mahasiswa yang lulus tes Matematika atau calon mahasiswa yang lulus tes Bahasa Inggris. Negasinya, tidak diterima calon mahasiswa yang tidak lulus tes Matematika dan tidak lulus tes Bahasa Inggris (baris ke 4)

Kesimpulan:

Ingkaran dari " $p \vee q$ ", dilambangkan " $\overline{p \vee q}$ " ialah " $\neg p \wedge \neg q$ " (Dalil de' Morgan)

Sesuai dengan dalil de Morgan pada Teori Himpunan bahwa

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (\text{dibaca bukan A dan bukan B}).$$

Negasi suatu disjungsi, dengan menggunakan tabel nilai kebenaran adalah sebagai berikut:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|-----|-----|----------|----------|------------|-----------------------|------------------------|
| B   | B   | S        | S        | B          | S                     | S                      |
| B   | S   | S        | B        | B          | S                     | S                      |
| S   | B   | B        | S        | B          | S                     | S                      |
| S   | S   | B        | B        | S          | B                     | B                      |

Dengan memperhatikan tabel nilai kebenaran di atas ini, dapat disimpulkan bahwa:

$\overline{p \vee q}$  "memiliki nilai yang sama dengan  $\neg p \wedge \neg q$ ".

Perhatikanlah nilai kebenaran pada kolom ke 6 dan ke 7 di atas.

Inkaran dari suatu Implikasi (ingkaran dari suatu Kondisional)

Dengan memperhatikan baris kedua tabel nilai implikasi bahwa, satu-satunya baris yang bernilai salah.

#### f. Implikasi

Banyak pernyataan, khususnya dalam matematika yang berbentuk 'jika p, maka q'. Kalimat seperti itu disebut **implikasi** atau **kondisional**.  
 Suatu implikasi 'jika p, maka q' dinyatakan sebagai  $p \rightarrow q$ . Pada implikasi  $p \rightarrow q$ , p disebut **hipotesis** dan q disebut **konklusi** atau **kesimpulan**.

Implikasi  $p \rightarrow q$  dapat dibaca:

- a) Jika p, maka q
- b) p mengakibatkan q
- c) p hanya jika q
- d) q jika p
- e) q asal p

Tabel kebenaran untuk implikasi sebagai berikut:

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| B | B | B                 |
| B | S | S                 |
| S | B | B                 |
| S | S | B                 |

Contoh:

- p: London di Inggris. (B)  
q:  $2 + 2 = 5$ . (S)  
 $p \rightarrow q$  : Jika London di Inggris, maka  $2 + 2 = 5$ . (S)
- p: Paris di Australia. (S)  
q: Jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $270^\circ$ . (S)  
 $p \rightarrow q$  : Jika Paris di Australia, maka jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $270^\circ$ . (B)
- p: Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil. (S)  
q: Jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $180^\circ$ . (B)

$p \rightarrow q$  : Jika jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil, maka jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $180^{\circ}$ . (B)

➤  $p$ :  $\sin 30^{\circ} = 1/2$ . (B)

$q$ : Pangeran Diponegoro dimakamkan di Makasar. (B)

$p \rightarrow q$  : Jika  $\sin 30^{\circ} = 1/2$ , maka Pangeran Diponegoro dimakamkan di Makassar. (B)

g. Negasi suatu Implikasi

Ingkaran dari " $p \rightarrow q$ " dilambangkan " $\overline{p \rightarrow q}$ ", ialah " $p \wedge \neg q$ " ( $p$  dan bukan  $q$ ).

Tabel nilai kebenaran sebagai berikut:

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \rightarrow q$ | $\overline{p \rightarrow q}$ | $p \wedge \neg q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|------------------------------|-------------------|
|     |     | S        |                   |                              |                   |
| B   | B   | B        | B                 | S                            | S                 |
| B   | S   | S        | S                 | B                            | B                 |
| S   | B   | B        | B                 | S                            | S                 |
| S   | S   |          | B                 | S                            | S                 |

Setelah memperhatikan tabel nilai kebenaran di atas ini, kita dapat menyimpulkan bahwa: " $\overline{p \rightarrow q}$ " bernilai sama dengan " $p \wedge \neg q$ ".

Perhatikanlah nilai kebenaran pada kolom ke 5 dan ke 6 yang bernilai sama. Perlu diperhatikan, jika kita

mengajukan suatu implikasi dengan nilai yang benar, maka pernyataan " $p \rightarrow q$ " dapat ditulis sebagai berikut:

- 1) Apabila  $p$  maka  $q$ , atau  $q$  apabila  $p$
- 2)  $p$  hanya apabila  $q$ , ( $p$  only if  $q$ ), karena  
sebab apabila tidak  $q$  maka makapun tidaklah  $p$ , sesuai dengan baris keempat dalam tabel nilai implikasi
- 3)  $p$  adalah syarat cukup untuk  $q$ , karena apabila  $p$  terjadi (pernyataan " $p$ " benar) maka " $q$ " pun terjadi (kalimat " $q$ " benar). Sesuai dengan baris pertama dalam tabel nilai implikasi
- 4)  $q$  adalah syarat perlu untuk  $p$ , karena terjadinya  $q$  memang mutlak diperlukan untuk terjadinya  $p$ . Sebab apabila tidak  $q$  maka juga tidak  $p$ , sesuai dengan baris keempat dalam tabel nilai implikasi kiranya perlu diketahui bahwa: suatu syarat yang perlu belum tentu telah cukup. Sebaliknya suatu syarat yang cukup belum tentu diperlukan

contoh:

- Diagonal segiempat ABCD berpotongan tegak lurus di tengah  $\Rightarrow$  segiempat ABCD bujur sangkar.  
Walaupun diagonal-diagonalnya berpotongan tegak lurus di tengah-tengah merupakan syarat yang perlu, namun demikian belum berarti cukup sebab ABCD bisa saja merupakan belah ketupat. Sebaliknya suatu syarat yang cukup belum tentu diperlukan
- Sisi-sisi ABC sama panjang  $\Rightarrow$  ABCD jajaran genjang.  
Walaupun sama panjang sisi-sisi itu cukup mengakibatkan ABCD menjadi jajaran genjang, namun

demikian ini tidak mutlak diperlukan sebab ada jajaran genjang yang sisi-sisinya tidak sama.

h. Biimplikasi

Perhatikan kalimat berikut:

‘Segitiga adalah bangun datar yang mempunyai 3 sisi’, yang bernilai benar. Kalimat ini dapat mempunyai 2 makna, yaitu:

- Jika suatu bangun berbentuk segitiga, maka bangun tersebut mempunyai 3 sisi. (B)
- Jika suatu bangun mempunyai 3 sisi, maka bangun tersebut berbentuk segitiga. (B)

Kedua kalimat tersebut dapat dirangkai menjadi satu kalimat majemuk dengan kata hubung dan, sehingga berbunyi:

‘Jika suatu bangun berbentuk segitiga, maka bangun tersebut mempunyai 3 sisi’ dan ‘jika suatu bangun mempunyai 3 sisi, maka bangun tersebut berbentuk segitiga’. (B)

Kalimat majemuk tersebut dapat disederhanakan sehingga berbunyi:

‘Suatu bangun mempunyai 3 sisi jika dan hanya jika bangun tersebut berbentuk segitiga’, yang berbentuk ‘p jika dan hanya jika q’. Kalimat majemuk seperti itu sering dijumpai dalam matematika.

Kalimat yang berbentuk ‘p jika dan hanya jika q’ disebut **biimplikasi** atau **bikondisional**.

Suatu biimplikasi 'p jika dan hanya jika q' dinyatakan sebagai  $p \leftrightarrow q$  .

Biimplikasi  $p \leftrightarrow q$  dapat dibaca:

- a) p jika dan hanya jika q
- b) p bila dan hanya bila q

Tabel kebenaran untuk biimplikasi sebagai berikut:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| B | B | B                     |
| B | S | S                     |
| S | B | S                     |
| S | S | B                     |

Contoh:

- p: London di Inggris. (B)  
q:  $2 + 2 = 5$ . (S)  
 $p \leftrightarrow q$  : London di Inggris jika dan hanya jika  $2 + 2 = 5$ . (S)
- p: Paris di Australia. (S)  
q: Jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $270^\circ$ . (S)  
 $p \leftrightarrow q$  : Paris di Australia jika dan hanya jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $270^\circ$ . (B)
- p: Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil. (S)  
q: Jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $180^\circ$ . (B)  
 $p \leftrightarrow q$ : Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika jumlah besar sudut dalam suatu segitiga  $180^\circ$ . (S)
- p:  $\sin 30^\circ = 1/2$  . (B)  
q: Pangeran Diponegoro dimakamkan di Makasar. (B)



$p \leftrightarrow q$ : sin  $30^\circ = 1/2$  bila dan hanya bila Pangeran Diponegoro dimakamkan di Makasar. (B)

i. Negasi suatu Biimplikasi

Dari tabel nilai biimplikasi terlihat bahwa suatu bi-implikasi itu bernilai salah hanya jika kedua komponennya bernilai berlainan; yaitu pada baris ke 2 atau ke 3 dalam tabel nilai bi-implikasi

Ingkaran dari " $p \leftrightarrow q$ " dilambangkan " $\overline{p \leftrightarrow q}$ " ialah  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Ingkaran dari suatu ingkaran (ingkaran dari ingkaran). Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah tabel nilai berikut:

| $p$ | $\neg p$ | $\overline{\overline{p}}$ |
|-----|----------|---------------------------|
| B   | S        | B                         |
| S   | B        | S                         |

Dari tabel nilai kebenaran di atas, diperoleh

Ingkaran dari " $\neg p$ " dilambangkan " $\overline{\neg p}$ ", ialah " $p$ " (tidak-tidak  $\approx$  ya)

j. Membuktikan dua atau lebih pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran sama.

Untuk membuktikan dua atau lebih pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran, yang sama dalam logika matematika, pada umumnya digunakan, tabel-tabel nilai kebenaran. Sekalipun dapat menggunakan hukum-hukum logika. Perhatikanlah contoh-contoh berikut di bawah ini.

Contoh :

Buktikan pernyataan " $\overline{p \leftrightarrow q}$ " mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$  dengan menggunakan tabel nilai kebenaran! Perhatikanlah tabel nilai kebenaran berikut:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \leftrightarrow q$ | $\overline{p \leftrightarrow q}$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg p \wedge q$ | $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ |
|-----|-----|----------|----------|-----------------------|----------------------------------|-------------------|-------------------|--|
| B   | B   | S        | S        | B                     | S                                | S                 | S                 | S  |
| B   | S   | S        | B        | S                     | B                                | B                 | S                 | B  |
| S   | B   | B        | S        | S                     | B                                | S                 | B                 | B  |
| S   | S   | B        | B        | B                     | S                                | S                 | S                 | S  |

### 3. Invers, Konvers dan Kontraposisi

'Saya lapar' dan 'Saya makan.' Implikasi tersebut adalah:

- ✚ Jika saya tidak lapar, maka saya tidak makan.
- ✚ Jika saya makan, maka saya lapar.
- ✚ Jika saya tidak makan, maka saya tidak lapar.

Manakah di antara implikasi-implikasi tersebut yang bernilai kebenaran?

Dalam kehidupan sehari-hari orang kebanyakan berpendapat bahwa implikasi 'Jika saya lapar, maka saya makan' bernilai kebenaran sama dengan implikasi ' Jika saya tidak lapar, maka saya tidak makan.'

Apakah pendapat kebanyakan orang tersebut benar berdasarkan logika matematika?

Untuk itu, coba anda cermati uraian berikut.

Contoh:

p: 'Saya lapar' dan

q: 'Saya makan,'

maka implikasi-implikasi tersebut secara simbolik dapat dinyatakan sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ : Jika saya lapar, maka saya makan.

$q \rightarrow p$ : Jika saya makan, maka saya lapar.

$\neg p \rightarrow \neg q$ : Jika saya tidak lapar, maka saya tidak makan.

$\neg q \rightarrow \neg p$ : Jika saya tidak makan, maka saya tidak lapar.

| p   | q   | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \rightarrow \neg q$ | $\neg q \rightarrow \neg p$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|----------|----------|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) | (2) | (3)               | (4)               | (5)      | (6)      | (7)                         | (8)                         |
| B   | B   | B                 | B                 | S        | S        | B                           | B                           |
| B   | S   | S                 | B                 | S        | B        | B                           | S                           |
| S   | B   | B                 | S                 | B        | S        | S                           | B                           |
| S   | S   | B                 | B                 | B        | B        | B                           | B                           |

Dari tabel di atas, terlihat bahwa:

❖ nilai kebenaran untuk  $p \rightarrow q$ , pada kolom (3), tidak sama dengan nilai kebenaran untuk  $\neg p \rightarrow \neg q$ , pada kolom (7).

Hal ini berarti bahwa kalimat:

'Jika saya lapar, maka saya makan' tidak bermakna sama dengan kalimat: 'Jika saya tidak lapar, maka saya tidak makan.'

Jadi ternyata pendapat kebanyakan orang tersebut tidak benar atau salah. Keadaan ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Kalimat 'Jika saya tidak lapar, maka saya tidak makan' belum tentu benar. Karena ada orang yang meskipun tidak lapar, tetapi makan juga.

- ❖ nilai kebenaran untuk  $p \rightarrow q$ , pada kolom (3), sama dengan nilai kebenaran untuk  $\neg q \rightarrow \neg p$ , pada kolom (8). Hal ini berarti bahwa kalimat: 'Jika saya lapar, maka saya makan' bermakna sama dengan kalimat: 'Jika saya tidak makan, maka saya tidak lapar.' Dari implikasi  $p \rightarrow q$  dapat dibuat implikasi-implikasi:  $q \rightarrow p$ ,  $\neg p \rightarrow \neg q$ , dan  $\neg q \rightarrow \neg p$  yang berturut-turut disebut konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi  $p \rightarrow q$ .

#### 4. Kuantor

Di awal telah kita pahami, bahwa *kalimat matematika terbuka dapat diubah menjadi suatu pernyataan*, dengan mengganti *variabelnya* dengan suatu *anggota / unsur semesta pembicaraan*.

Masih ada suatu langkah mengubah kalimat matematika terbuka menjadi tertutup / pernyataan, yaitu dengan *menggunakan kuantor*, suatu ungkapan/kata yang menyatakan "*nominal atau berapa banyak*". Pernyataan kuantor dibedakan menjadi dua, yaitu:

##### a. Kuantor Universal:

Suatu kuantor yang menunjukkan bahwa setiap atau semua elemen/unsur berlaku pada sistem / semesta pembicaraan.

Kuantor universal biasa diberi lambang :  $\forall(x)$

dibaca: *untuk semua x, berlaku .....*

*semua x, berlaku .....*

setiap  $x$ , berlaku .....

Contoh :

- i. Semua siswa kelas X-2 SMA Negeri 1 Ambon pandai
- ii. Semua bilangan prima adalah bilangan asli

Secara umum dapat dikatakan bahwa :

Pernyataan berkuantor universal "Semua A adalah B" ekuivalen dengan pernyataan implikasi "jika  $x \in A$  maka  $x \in B$ "

Jika dituliskan dalam bentuk lambang

$$\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$$

Contoh :

- i. Semua penyanyi dangdut berparas cantik  
Ekuivalen dengan : jika Emi penyanyi dangdut, maka ia berparas cantik
- ii. Semua penjahat memakai topeng  
Ekuivalen dengan : jika  $x$  seorang penjahat, maka  $x$  memakai topeng
- iii. Semua segitiga sama sisi adalah segitiga sama kaki  
Ekuivalen dengan : jika  $\triangle ABC$  sama sisi maka  $\triangle ABC$  sama kaki

**b.** Kuantor Ekstensial :

Suatu kuantor yang menunjukkan bahwa tidak semua atau hanya ada atau beberapa elemen / unsur yang berlaku / memenuhi sistem / semesta pembicaraan.

Kuantor universal biasa diberi lambang :  $\exists(x)$

dibaca: *tidak semua x, berlaku ....*  
*ada x, berlaku .....*  
*beberapa x, berlaku .....*

Contoh :

- i. Beberapa kuda berwarna coklat
  - ii. Beberapa siswa kelas X-2 MAN Negeri 1 Ambon pandai
- Secara umum dapat dikatakan bahwa :

Pernyataan berkuantor eksistensial “beberapa A adalah B” ekuivalen dengan “sekurang-kurangnya ada sebuah  $x \in A$  yang merupakan  $x \in B$ ”

Jika dituliskan dalam bentuk lambang

$$\exists x, x \in A \text{ dan } x \in B$$

Contoh :

- i. Beberapa kuda berwarna coklat  
Ekuivalen dengan : sekurang-kurangnya ada seekor kuda berwarna coklat
  - ii. Beberapa siswa kelas X-2 MAN Negeri 1 Ambon pandai  
Ekuivalen dengan : sekurang-kurangnya ada seorang siswa kelas X-2 MAN Negeri 1 Ambon pandai
- c. Ingkaran pernyataan berkuantor
- Pada awal modul ini telah dibahas mengenai ingkaran sebuah pernyataan. Ada 3 hal yang harus diingat yaitu :
- a. Ingkaran atau negasi dari pernyataan  $p$  dilambangkan dengan  $\neg p$

- b. Jika  $p$  pernyataan yang bernilai benar maka  $\neg p$  pernyataan yang bernilai salah
  - c. Jika  $p$  pernyataan yang bernilai salah maka  $\neg p$  pernyataan yang bernilai benar
- Ketentuan ini juga berlaku apabila  $p$  merupakan pernyataan berkuantor, baik itu kuantor universal maupun kuantor eksistensial.

- d. Ingkaran dari pernyataan berkuantor universal
- Secara umum ingkaran dari pernyataan berkuantor universal dapat ditentukan sebagai berikut

$$\neg [\forall x, p(x)] \equiv \exists x, \neg p(x)$$

Dibaca : ingkaran dari "untuk semua  $x$  yang berlaku  $p(x)$ " "ekuivalen dengan" "ada  $x$  yang bukan  $p(x)$ "

Contoh 1:

Kalimat, "setiap siswa telah lunas membayar SPP".

Ingkaran (negasi) nya ialah "Tidak setiap siswa telah lunas membayar SPP". Kalimat terakhir ini mempunyai nilai logika yang sama dengan kalimat "Ada siswa yang belum lunas (atau tidak lunas) membayar SPP".

Contoh 2:

Setiap bilangan genap habis dibagi oleh 2. Ingkarannya ialah "Tidak setiap bilangan genap habis dibagi oleh 2"

Kalimat terakhir ini bernilai sama dengan kalimat "Ada bilangan genap yang tidak habis dibagi oleh 2".

Kesimpulan:

mengingkari bahwa setiap anggota dari SP memiliki sifat P, adalah sama dengan menyatakan bahwa ada (terdapat) anggota yang tidak memiliki sifat P.

Contoh 3:

i.  $\forall x \in R, x + 3 = 4$

Negasinya :  $\exists x \in R, x + 3 \neq 4$

ii.  $\forall x \in R, x^2 + 1 > 0$

Negasinya :  $\exists x \in R, x^2 + 1 \leq 0$

Contoh 4:

Jika SP himpunan bilangan nyata, maka (ingkaran) dari pernyataan:

$$(\forall x)(\forall y). x \neq y \Rightarrow (x < y) \vee (y < x)$$

dapat dikerjakan dengan mengikuti langkah-langkah aturan di atas, sehingga penyelesaiannya sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \overline{(\forall x)(\forall y). x \neq y \Rightarrow (x < y) \vee (y < x)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \overline{(\exists y). x \neq y \Rightarrow (x < y) \vee (y < x)}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) \overline{x \neq y \Rightarrow (x < y) \vee (y < x)}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) x \neq y \wedge \overline{(x < y) \vee (y < x)}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) x \neq y \wedge \overline{(x < y \wedge (y < x))}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) x \neq y \wedge (x \geq y) \wedge (y \geq x)$$

e. Ingkaran dari pernyataan berkuantor eksistensial



Secara umum ingkaran dari pernyataan berkuantor eksistensial dapat ditentukan sebagai berikut

$$- [\exists x, p(x)] \equiv \forall x, - p(x)$$

Dibaca : ingkaran dari "ada x berlaku  $p(x)$ " ekuivalen dengan "untuk semua x bukan  $p(x)$ "

Contoh :

i.  $\exists x \in R, x + 3 = 4$

Negasinya :  $\forall x \in R, x + 3 \neq 4$

ii.  $\exists x \in R, |x^2 + 1| > 0$

Negasinya :  $\forall x \in R, |x^2 + 1| \leq 0$

Inkaran dari pernyataan berkuantor dapat dirangkum pada tabel berikut :

| Pernyataan Berkuantor | Inkaran  |
|-----------------------|--|
| $\forall x, p(x)$     | $\exists x, \sim p(x)$   |
| semua x adalah y      | beberapa x bukan y<br>tidak semua x adalah y   |
| $\exists x, p(x)$     | $\forall x, \sim p(x)$   |
| beberapa x adalah y   | semua x bukan y<br>tidak ada (tiada) x yang merupakan y<br>jika x adalah X, maka x bukan Y |

## 5. Penarikan Kesimpulan

Suatu pembuktian dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam matematika berkenaan dengan pernyataan-pernyataan yang saling berkait. Pernyataan-pernyataan tersebut adalah pernyataan-pernyataan yang kebenarannya dapat dibuktikan atau dapat diterima. Dengan pernyataan-pernyataan tersebut orang berargumen agar dapat menarik suatu kesimpulan atau konklusi.

Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan disebut **premis**.

Hasil dari suatu penarikan kesimpulan disebut **konklusi atau kesimpulan**.

Rangkaian premis dan konklusi yang memuat bukti disebut **argumen**.

Suatu **argumen dikatakan valid** bila kesimpulan dalam argumen tersebut benar-benar diturunkan dari premis-premisnya.

Pernyataan yang selalu bernilai benar disebut **tautologi**.  
 Pernyataan yang selalu bernilai salah disebut **kontradiksi**.  
 Sedangkan pernyataan yang dapat bernilai benar atau salah disebut **kalimat sintetis**.

Contoh:

- $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$  merupakan suatu kontradiksi. Perhatikan tabel kebenarannya berikut ini.

| p   | q   | $p \rightarrow q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ |
|-----|-----|-------------------|----------|-------------------|--|
| (1) | (2) | (3)               | (4)      | (5)               | (6)  |
| B   | B   | B                 | S        | S                 | S  |
| B   | S   | S                 | B        | B                 | S  |
| S   | B   | B                 | S        | S                 | S  |
| S   | S   | B                 | B        | S                 | S  |

Nilai kebenaran untuk  $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$  yang terdapat pada Kolom (6) selalu salah (S), karena itu  $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$  merupakan suatu kontradiksi.

- $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$  merupakan suatu tautologi. Perhatikan tabel kebenarannya berikut ini.

| p   | q   | $p \rightarrow q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$ |
|-----|-----|-------------------|----------|-------------------|--|
| (1) | (2) | (3)               | (4)      | (5)               | (6)  |
| B   | B   | B                 | S        | S                 | B  |
| B   | S   | S                 | B        | B                 | B  |
| S   | B   | B                 | S        | S                 | B  |
| S   | S   | B                 | B        | S                 | B  |

Nilai kebenaran untuk  $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$  yang terdapat pada kolom (6) selalu benar (B), karena itu  $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$  merupakan suatu tautologi.

- $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  merupakan suatu kalimat sintetis. Perhatikan tabel kebenarannya berikut ini.

| p   | q   | r   | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4)               | (5)                               |
| B   | B   | B   | B                 | B                                 |
| B   | B   | S   | B                 | S                                 |
| B   | S   | B   | S                 | B                                 |
| B   | S   | S   | S                 | B                                 |
| S   | B   | B   | B                 | B                                 |
| S   | B   | S   | B                 | S                                 |
| S   | S   | B   | B                 | B                                 |
| S   | S   | S   | B                 | S                                 |

Nilai kebenaran untuk  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  yang terdapat pada kolom (5) ada yang benar (B) dan ada pula yang salah (S), karena itu  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  merupakan suatu kalimat sintetis.

Berikut akan dibicarakan beberapa cara penarikan kesimpulan.

1) Modus ponens

Bentuk modus ponens adalah

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$q$$

\_\_\_\_\_

Anda dapat menunjukkan bahwa kalimat  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$  merupakan tautologi dengan tabel berikut.

| p   | q   | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge p$ | $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--|
| (1) | (2) | (3)               | (4)                          | (5)  |
| B   | B   | B                 | B                            | B  |
| B   | S   | S                 | S                            | B  |
| S   | B   | B                 | S                            | B  |
| S   | S   | B                 | S                            | B  |

Karena nilai kebenaran untuk  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$  yang terdapat pada kolom (5) selalu benar, maka  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$  merupakan tautologi.

Berikut ini disajikan contoh penggunaan modus ponens

Contoh:

Premis 1: Jika Mega seorang siswa, maka dia rajin belajar.

Premis 2: Mega seorang siswa.

Konklusi: Mega rajin belajar.

## 2) Modus tollens

Bentuk modus tollens adalah

$p \rightarrow q$

$\neg q$

$\neg p$

\_\_\_\_\_

Anda dapat menunjukkan bahwa kalimat  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  merupakan tautologi dengan tabel berikut.

| p   | q   | $p \rightarrow q$ | $\neg q$ | $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ | $\neg p$ | $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ |
|-----|-----|-------------------|----------|-----------------------------------|----------|--|
| (1) | (2) | (3)               | (4)      | (5)                               | (6)      | (7)  |
| B   | B   | B                 | S        | S                                 | S        | B  |
| B   | S   | S                 | B        | S                                 | S        | B  |
| S   | B   | B                 | S        | S                                 | B        | B  |
| S   | S   | B                 | B        | B                                 | B        | B  |

Karena nilai kebenaran untuk  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  yang terdapat pada kolom (7) selalu benar, maka  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  merupakan tautologi.

Berikut ini disajikan contoh penggunaan modus tollens

Contoh:

Premis 1: Jika Dian rajin belajar, maka nilainya selalu bagus.

Premis 2: Nilai Dian tidak selalu bagus.

Konklusi: Dian tidak rajin belajar.

### 3) Silogisme

Bentuk silogisme adalah

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\frac{\quad}{p \rightarrow r}$$

Anda dapat menunjukkan bahwa kalimat  $((p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$  merupakan tautologi dengan tabel berikut.

| p   | q   | r   | $p \rightarrow q$ | $(4) \wedge (2)$ | $(5) \rightarrow (3)$ | $p \rightarrow r$ | $(6) \vee (7)$ |
|-----|-----|-----|-------------------|------------------|-----------------------|-------------------|----------------|
| (1) | (2) | (3) | (4)               | (5)              | (6)                   | (7)               | (8)            |
| B   | B   | B   | B                 | B                | B                     | B                 | B              |
| B   | B   | S   | B                 | B                | S                     | S                 | B              |
| B   | S   | B   | S                 | S                | B                     | B                 | B              |
| B   | S   | S   | S                 | S                | B                     | S                 | B              |
| S   | B   | B   | B                 | B                | B                     | B                 | B              |
| S   | B   | S   | B                 | B                | S                     | B                 | B              |
| S   | S   | B   | B                 | S                | B                     | B                 | B              |
| S   | S   | S   | B                 | S                | B                     | B                 | B              |

Karena nilai kebenaran untuk  $((p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$  yang terdapat pada kolom (8) selalu benar, maka  $((p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$  merupakan tautologi.

Berikut ini disajikan contoh penggunaan silogisme.

Premis 1: Jika  $13 + 27 = 56$ , maka  $6 : 7 = 8$ .

Premis 2: Jika  $6 : 7 = 8$ , maka  $34 \times 2 = 78$ .

Konklusi: Jika  $13 + 27 = 56$ , maka  $34 \times 2 = 78$ .

## BAB X. Logika Matematika

### C. Pengantar

Logika Matematika merupakan salah satu dasar untuk mempelajari Matematika lebih lanjut. Mahasiswa diharapkan mempelajari logika matematika sebaik-baiknya, agar dapat memperkuat dasar pengetahuan, khususnya dalam tugas mahasiswa sebagai calon guru bidang studi Matematika maupun ilmu matematika.

Dalam bab ini akan dipelajari pembagian kalimat, pernyataan, lambang pernyataan dan tabel-tabel nilai kebenaran. Seperti halnya dengan mempelajari Ilmu pengetahuan yang lain, dalam mempelajari topik dalam bab ini membutuhkan analisis dan pemahaman yang mendalam karena merupakan pengetahuan dasar. Seyogyanya mahasiswa mengikuti secara cermat, agar lebih mudah mencernanya dan dapat mengambil manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Terlebih lagi untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan ketajaman bahasa pengetahuan dan akal pikiran. Dengan demikian, diharapkan mahasiswa dalam mempelajari dan menguasai ilmu pengetahuan yang lain lebih akurat dan cepat terutama beberapa pokok bahasan lain dalam bidang studi matematika.

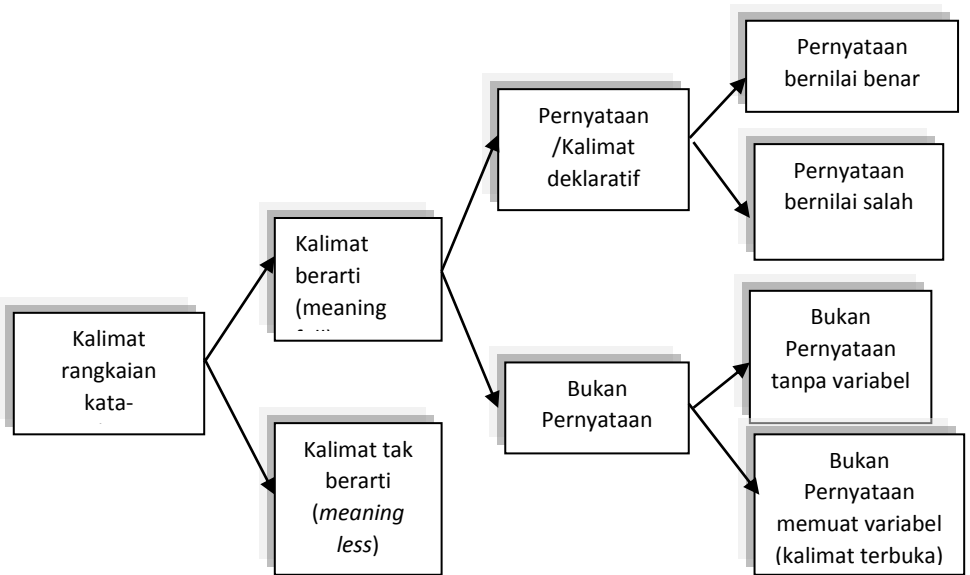
### D. Kalimat, Pernyataan dan Lambang Suatu Pernyataan

Logika Elementer dan Teori Himpunan berhubungan erat. Keduanya merupakan dasar yang sangat penting dalam mempelajari Matematika. Salah satu unsur penting dari Logika Elementer adalah mempertajam atau memperjelas bahasa ilmu pengetahuan. Dalam kehidupan sehari-hari, untuk



membicarakan sesuatu, diperlukan suatu bahasa yang dipahami dalam pembicaraan tersebut. Demikian pula beberapa istilah dalam matematika sering dijumpai tidak dijelaskan artinya. Setiap orang dianggap sudah mengerti (*comprehend*) istilah tersebut. Contoh, kata “himpunan”, “elemen” dan sebagainya. Kata-kata tersebut dapat kita rangkai menjadi pengertian atau istilah-istilah. Dalam matematika sering dijumpai pernyataan-pernyataan yang nilai kebenarannya tidak dibuktikan. Pernyataan-pernyataan tersebut kita namakan “pernyataan pangkal” atau “aksioma”. Dari pernyataan pangkal dapat kita turunkan pernyataan-pernyataan baru yang nilai kebenarannya dapat dibuktikan dengan menggunakan hukum-hukum logika. Penarikan kesimpulan yang didasarkan atas definisi dan pernyataan pangkal dinamakan “penarikan kesimpulan secara deduktif”. Oleh karena itu, pengutaraan pendapat yang akan kita sampaikan dengan menggunakan prinsip logika, perlu kita gunakan bahasa, berupa rangkaian lambang atau simbol yang diucapkan atau ditulis menurut aturan-aturan tertentu. Kadangkala terdapat rangkaian kata-kata atau simbol-simbol, menurut susunannya rangkaian kata atau simbol berupa struktur kalimat, meskipun demikian, rangkaian kata atau simbol tadi tidak mengandung arti (*meaning less*)  
Perhatikan rangkuman di bawah ini:

Diagram 1.1 : Pembagian Kalimat Matematika



Dalam kaitannya dengan *problem posing* dan *problem solving* matematika yang terkait dengan rangkaian kalimat dapat dilihat di bawah ini.

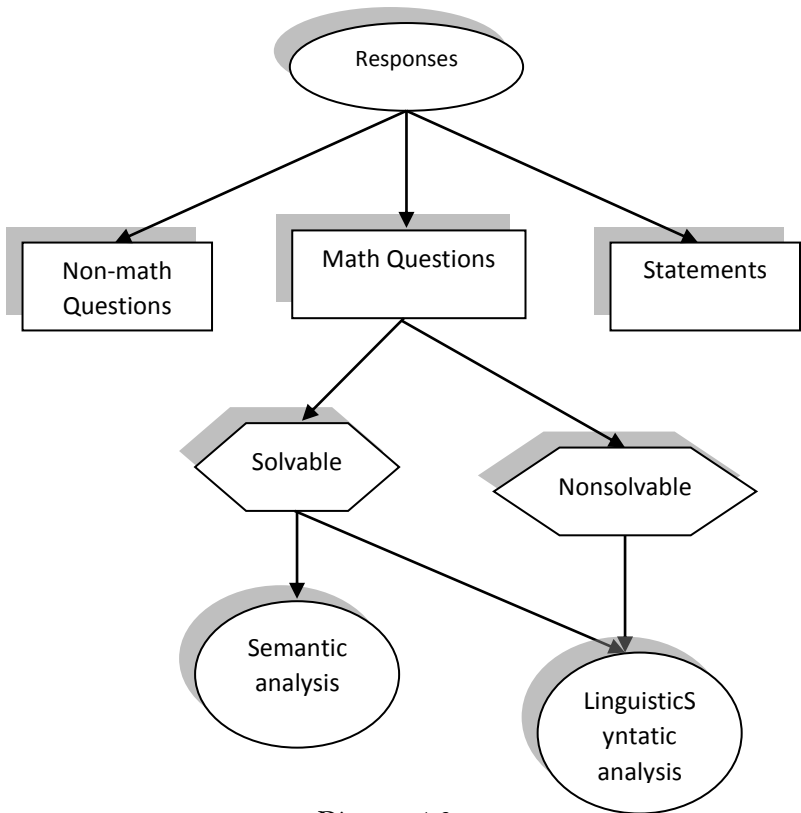


Diagram 1.2:  
 Jenis Respons Matematika, Struktur Sintaksis dan Hubungan Semantik

Dari diagram 1.1, tampak bahwa kalimat terbagi menjadi dua, yaitu:

kalimat berarti  
kalimat tak berarti.

Contoh dari masing-masing kalimat tersebut adalah sebagai berikut:

Kalimat berarti:

- (a) Kitab Al Quran tidak ada keraguan padanya, petunjuk bagi mereka yang bertaqwa.
- (b) Allah, adalah satu-satunya Tuhan yang berhak disembah
- (c) Semoga Allah yang Maha Pemberi Rahmat merahmati civitas IAIN Ambon.

Kalimat tak berarti:

- (a) Kemarin 3 terjun bebas
- (b) Batu merangkak di jalan
- (c) Pohon dikali 5

Kalimat-kalimat tak berarti tidak akan dibicarakan lebih lanjut dalam Matematika.

Kalimat berarti dibagi menjadi 2 macam,

1). Kalimat deklaratif atau pernyataan

Kalimat pernyataan yaitu suatu kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus kedua-duanya (benar dan salah). Kalimat tersebut disebut benar, jika sesuai dengan kenyataan, dan disebut salah apabila bertentangan (tidak sesuai) dengan kenyataan.

Contoh,

- a. Semua bilangan prima adalah ganjil (pernyataan bernilai salah)

- b. Nabi Muhammad Saw adalah nabi terakhir.  
(pernyataan bernilai benar ).

2). Kalimat bukan pernyataan.

Kalimat bukan pernyataan adalah kalimat berarti, tetapi tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Kalimat bukan pernyataan ini dibagi menjadi 2 macam yaitu:

- (1) Kalimat bukan pernyataan tanpa variabel.

Contoh:

- a. Siapakah Alkhawarizmi itu?  
b. Semoga Tuhan memberkati kita semua.

- (2) Kalimat bukan pernyataan memuat variabel (kalimat terbuka)

Kalimat terbuka (*open sentences*) adalah kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, atau kalimat yang memuat satu atau beberapa variabel yang apabila variabel tersebut diganti akan menjadi pernyataan.

Contoh:

1.  $\frac{3}{2}x + 5 = 10$

2.  $-4x + 9 = 5$

3.  $y$  adalah bilangan prima yang genap

Pernyataan

Dalam percakapan sehari-hari, kita banyak mendengar dan mengucapkan pernyataan. Suatu pernyataan dalam pengajaran Matematika ialah suatu kalimat yang hanya mempunyai nilai benar saja atau salah saja. Jadi tidak keduanya yaitu benar dan salah. Setiap pernyataan adalah suatu

suatu kalimat, tetapi suatu kalimat, belum tentu suatu pernyataan. Misalnya,

Apa yang dikerjakan oleh mahasiswa?

Berilah saya spidol itu.

Rangkaian kata di atas adalah kalimat, akan tetapi bukanlah pernyataan, karena benar tidak, salahpun juga tidak. Jadi kedua kalimat di atas, adalah kalimat, bukan pernyataan.

Perhatikanlah kalimat berikut ini:

- (1) Masohi adalah ibukota Provinsi Maluku.
- (2) 41 adalah jumlah juz dalam Al-Qur'an
- (3) Sapi adalah binatang yang berkaki dua atau empat
- (4) Zakir Naik adalah Presiden India.

Keempat kalimat di atas adalah pernyataan, karena no (1) jelas bernilai salah, sedangkan kalimat no (3) dan no. (4) juga salah. Istilah lain untuk pernyataan ialah, kalimat deklaratif, atau statement, atau kalimat tertutup. Ada juga yang menyebut proposisi.

### Lambang Pernyataan

Pernyataan-pernyataan dalam logika Matematika digunakan lambang-lambang huruf kecil. Misalnya:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , dan sebagainya. Pernyataan "5 adalah bilangan ganjil" dapat kita lambangkan dengan  $p$ "

"Semua manusia hidup perlu makan" dengan lambang " $q$ " dan seterusnya.



## Daftar Pustaka

- \_\_\_\_\_, Ensiklopedi Islam Jilid 5. 2005. Jakarta: PT Ichtiar Baru van Hoeve.
- Al-Subhani, Muhammad Ali. 1970. *Al-Tibyan Fi Ulum Quran*. Bairut: Dar Al-Irsyad.
- Anshori. 2013. *Ulumul Quran*. Jakarta: Rajawali Press.
- Anwar, Yunus dan Saehudin. 2009. *Pengantar Studi Islam*. Bandung: CV Pustaka.
- Departemen Pendidikan Nasional. 2017. *Kamus Besar Bahasa Indonesia Edisi Kelima*, Jakarta: Gramedia.
- Diezmann, C.M., & Watters, J.J., & English, L.D. 2001. *Implementing mathematical investigations with young children*. In Proceedings 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp 170-177, Sydney.
- Hanafy. 2014. Jurnal Pendidikan: Konsep Belajar dan Pembelajaran, Lentera Pendidikan, Vol. 17 No. 1 Juni 2014: 66-79, hlm. 74.
- Haryanto. 2006. Pengembangan Cara Berpikir Divergen-Konvergen Sebagai Isu Kritis dalam Proses Pembelajaran.. Majalah Ilmiah Pembelajaran, Nomor 1. Vol. 1 Mei 2006.
- Muhlislarini, A.H., 2014. *Perencanaan dan Strategi Pembelajaran Matematika*. Jakarta: Rajagrafindo Persada.



- Nata, Abuddin. 2006. *Metodologi Studi Islam*. Jakarta: PT. Raja Grafindo
- Sardiman. 2012. *Interaksi dan motivasi Mengajar*. Jakarta: Rajagrafindo Persada, h.21
- Shadily. 1989. *Sosiologi untuk Masyarakat Indonesia*. Jakarta: Bina Aksara
- Suparta, Munzier. 2014. *Ilmu Hadist*. Jakarta: Rajawali Pers.
- Suppes, Patrick. 1960. *Axiomatic Set Theory*. Canada: D. Van Nostrand Company, Inc.
- Suprijono. 2012. *Cooperative Learning*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor. 22 Tahun 2006
- Tarski, Alfred. 1995. *Introduction to Logic and to the Methodology of Sciences*. New York: Oxford University.
- Tirta Seputro, Theresia M.H. 1992. *Pengantar Dasar Matematika (Logika dan Teori Himpunan)*. Jakarta: Erlangga.
- Turmudi. 2008. *Landasan Filsafat dan Teori Pembelajaran Matematika (Berparadigma Eksploratif dan Investigatif)*. Jakarta: Leuser Cipta Pustaka.
- Undang-undang Republik Indonesia Nomor 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional, hlm. 6.

- Upu, Hamzah. 2006. *Penerapan Nilai-nilai Agama untuk Sains*. Makalah Disampaikan pada Kuliah Umum di Universitas Islam Negeri Alauddin. Makassar: Tidak Diterbitkan.
- Yuwono, RM. 1985. *Logika Matematika*. Ujung Pandang: Jurusan Matematika FPMIPA IKIP Ujung Pandang.