TEORI DAN APLIKASI MATEMATIKA EKONOMI

Ahmad Faridh Ricky Fahmy, M.Pd
Rusdin, S.Si., M.Si
Ilmadi, M.Pd
Rani Rahim, S.Pd., M.Pd
Agung Wicaksono, M.Pd
Gamar Assagaf, M.Pd
Fitri Kumala Dewi, M.Pd
Dr. Jan Setiawan, S.Si., M.Si
Dr. Djaffar Lessy, M.Si

Editor:
Nurwijayanti KN, ST., MT

YAYASAN PENERBIT MUHAMMAD ZAINI

TEORI DAN APLIKASI MATEMATIKA EKONOMI

Penulis:
Ahmad Faridh Ricky Fahmy, M.Pd; Rusdin, S.Si., M.Si; Ilmadi, M.Pd; Rani Rahim, S.Pd., M.Pd; Agung Wicaksono, M.Pd; Gamar Assagaf, M.Pd; Fitri Kumala Dewi, M.Pd; Dr. Jan Setiawan, S.Si., M.Si; Dr. Djaffar Lessy, M.Si.

ISBN: 978-623-97675-1-8

Editor:
Nurwijayanti KN, ST., MT

Penyunting:
Nanda Saputra, M.Pd.

Desain Sampul dan Tata Letak
Atika Kumala Dewi

Penerbit:
Yayasan Penerbit Muhammad Zaini

Redaksi:
Jalan Kompleks Pelajar Tijue
Desa Baroh Kec. Pidie
Kab. Pidie Provinsi Aceh
No. Hp: 085277711539
Email: penerbitzaini101@gmail.com
Website: https://penerbitzaini.com/

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji dan syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan buku Teori dan Aplikasi Matematika Ekonomi ini. Buku referensi ini merupakan buku kolaborasi yang dituliskan oleh beberapa dosen yang bergabung dalam Asosiasi Dosen Kolaborasi Lintas Perguruan Tinggi.

Adapun *bookchapter* ini tidak akan selesai tanpa bantuan, diskusi dan dorongan serta motivasi dari beberapa pihak, walaupun tidak dapat disebutkan satu persatu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebanyak-banyaknya.

Ahirnya, penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Dengan demikian, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan serta perkembangan lebih lanjut pada *bookchapter* ini.

Wassalamu'alaikumsalam, Wr.Wb.

Sigli, 12 Juli 2021

Tim Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
KONSEP DASAR MATEMATIKA EKONOMI

A. Persamaan dan Pertidaksamaan

Sebelum membahas persamaan dan pertidaksamaan, kita harus mengetahui dulu apa itu variabel, koefisien, dan konstanta. Variabel (peubah) adalah simbol yang mewakili suatu bilangan. Biasanya dilambangkan dengan huruf alfabet. Koefisien adalah faktor dari variabel. Konstanta adalah nilai tetap atau bilangan yang tidak memuat variabel.

Contoh

$3x+7$ variabel = x, koefisien x = 3, konstanta = 7.

Dalam buku ini kita hanya membahas tentang persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel. Persamaan adalah kalimat matematis yang dihubungkan dengan tanda samadengan $(=)$. Sedangkan pertidaksamaan adalah kalimat matematis yang dihubungkan dengan salah satu tanda kurang dari, lebih dari, kurang dari atau samadengan, lebih dari atau samadengan $(<, >, \leq, \geq)$.

1. Persamaan Linear Satu Variabel (PLSV)

   Persamaan linear satu variabel adalah persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Persamaan linear juga disebut persamaan garis lurus karena jika digambarkan grafiknya pada bidang cartesius akan membentuk garis lurus. Bentuk umumnya

   $ax+b=0$ dengan $a \neq 0$, *x* variabel, dan *b* konstanta.

2. Menyelesaikan Persamaan Linear Satu Variabel

   Menyelesaikan persamaan linear yaitu mencari nilai dari variabel, sehingga jika nilai tersebut disubtitusikan ke persamaan akan bernilai benar. Cara untuk menyelesaikan sebagai berikut

   a. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas suatu persamaan

b. Mengalikan bilangan yang sama pada kedua ruas suatu persamaan

Contoh

Carilah penyelesaian dari: $3x+2=x-2$

Jawab:

$$\begin{aligned} 3x &= x-2-2 && \text{(tambahkan – 2)} \\ 3x-x &= -4 && \text{(tambahkan – } x\text{)} \\ 2x &= -4 \\ x &= -4\cdot\frac{1}{2} && \text{(kalikan } \tfrac{1}{2}\text{)} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

3. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel (PtLSV)
   Pertidaksamaan linear satu variabel adalah pertidaksamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Bentuk umumnya $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, dan $ax+b\leq 0$.
4. Menyelesaikan Peretidaksamaan Linear Satu Variabel
   Hampir sama dengan PLSV namun jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif kita harus membalikkan arah dari tanda pertidaksamaannya.

   Contoh

   Carilah penyelesaian dari $3-4x\geq 19$

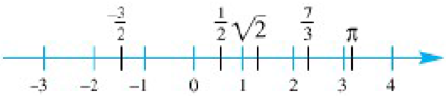
   Jawab:

$$\begin{aligned} 3-4x &\geq 19 \\ -4x &\geq 19-3 && \text{(tambahkan – 3)} \\ -4x &\geq 16 \\ x &\geq 16\cdot -\frac{1}{4} && \text{(kalikan } -\tfrac{1}{4}\text{)} \\ x &\leq -4 \end{aligned}$$

B. Sistem Bilangan Real

1. Bilangan Real

Bilangan real adalah himpunan bilangan rasional dan irasional. Secara sederhana bilangan real dapat didefinisikan sebagai semua bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk desimal. Bilangan-bilanga real dapat digambarkan oleh himpunan titik-titik yang terletak pada garis bilangan.



Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ diamana a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Dari definisi tersebut, jika kita membagi pembilang dengan penyebut, kita memperoleh bilangan desimal. Sebagai contoh

a. $\frac{1}{2} = 0{,}5$

b. $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

c. $\frac{3}{7} = 0{,}4285714285\,71\ldots$

d. $\frac{215}{99} = 2{,}171717\ldots$

Bilangan irasional adalah bilangan-bilangan real yang tidak bisa dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ diamana a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan irasional juga dapat dinyakan dalam bentuk desimal.

Contoh

a. $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$

b. $\pi = 3{,}1415926353\ldots$

c. $e = 2{,}71828182859\ldots$

Bentuk desimal dari bilangan rasional memiliki akhir seperti $\frac{1}{2} = 0{,}5$ atau berulang membentuk pola taratur yang berlangsung terus-menerus seperti $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots$. Sedangkan bentuk desimal bilangan irasional tidak memiliki akhir atau tidak berulang membentuk pola teratur.

Terdapat lambang-lambang baku untuk mengenali himpunan-himpunan bilangan, misalnya:

a. $R = \{x \mid x \text{ bilangan real}\}$,
b. $N = \{x \mid x \text{ bilangan asli}\}$,
c. $Z = \{x \mid x \text{ bilangan bulat}\}$,
d. $Q = \{x \mid x \text{ bilangan rasional}\}$,dan
e. $Q^c = \{x \mid x \text{ bilangan irasional}\}$.

Jelas $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dan $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Hal ini berarti

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

2. Operasi pada R

Operasi jumlah dan kali pada R memenuhi sifat-sifat berikut. Jika $x, y, z \in R$, berlaku:

a. Sifat komutatif

$$x + y = y + x \text{ dan}$$
$$x.y = y.x$$

b. Sifat asosiatif

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

c. Sifat distributif

$$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$$
$$(x + y) \,.\, z = x \,.\, z + y \,.\, z$$

d. Unsur identitas

Terdapat unsur-unsur 0 dan 1 yang memenuhi

$$x + 0 = 0 + x,\ \forall\ x \in R \text{ dan}$$
$$x \,.\, 1 = 1 \,.\, x,\ \forall\ x \in R.$$

Unsur identitas pada penjumlahan dan perkalian berturut-turut adalah 0 dan 1.

e. Unsur balikan *(invers)*

$$\exists x \in R \ni -x \in R \in x + (-x) = 0 \text{ dan}$$
$$\forall x \in R, x \neq 0, \exists x^{-1} \in R \in x \cdot x^{-1} = 1$$

Invers penjumlahan dari *a* adalah – *a*. *Invers* perkalian dari *a* adalah $\frac{1}{a}$.

C. Konsep dan Teori Himpunan

1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan atau kelompok benda (objek) yang telah terdefinisi dengan jelas. Arti terdefinisi dengan jelas itu dapat dibedakan satu dengan lainnya.

Contoh

Kumpulan mahasiswa jurusan pendidikan matematika

2. Lambang Himpunan

Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital; A, B, C dan sebagainya. Anggota himpunan ditulis dalam kurung kurawal dan antar anggota dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh

Himpunan huruf vokal dapat ditulis $V = \{a, i, u, e, o\}$ dengan anggotanya: *a, i, u, e, o.*

3. Anggota Himpunan dan Lambangnya

Simbol anggota suatu himpunan dapat dituliskan sebagai berikut:

a. Bila x anggota *A*, maka ditulis $x \in A$ (x anggota himpunan *A*)
b. Bila x bukan anggota *A*, maka ditulis $x \notin A$ (x bukan anggota himpunan *A*)

Contoh

C = {0, 1, 2, 3, 4} , maka 0 $\in$ A, 3 $\in$ A, 5 $\notin$ A

4. Kardinalitas Himpunan

Kardinalitas himpunan adalah menyatakan banyak anggota suatu himpunan. Kardinalitas himpunan *A* dinyatakan dengan $n(A)$.

Contoh

A = {1, 2, 3, 4, 5} maka $n(A) = 5$

5. Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

a. Himpunan Berhingga adalah himpunan yang anggotanya terbatas.
b. Himpunan Tak Berhingga adalah himpunan yang anggotanya tak terbatas.

Contoh

1) *Z* ={-2, -1, 0, 1, 2, 3}
   Z adalah himpunan berhingga karena anggotanya terbatas dari -2 sampa 3
2) *P* = {2, 3, 5, 7, ...} himpunan tak berhingga dengan anggotanya: 2, 3, 5, 7, dan seterusnya.

6. Menyatakan Suatu Himpunan

Menyatakan suatu himpunan dapat dilakukan dengan tiga cara (metode):

a. Kata-kata (sifat keanggotaan)
   Menyatakan suatu himpunan dengan kata-kata atau pernyataan untuk menunjukkan sifat keanggotaannya dan harus dinyatakan dengan jelas.
b. Mendaftar anggotanya (enumerasi),
   Menyatakan suatu himpunan dengan menuliskankan satu persatu anggotanya dalam kurung kurawal yang setiap anggota himpunan dipisahkan dengan tanda koma.

c. Dengan notasi pembentuk himpunan (syarat keanggotaan)
   Menuliskan suatu himpunan dengan dengan notasi pembentuk himpunan, anggotanya dilambangkan dengan variabel kemudian diikuti dengan pernyataan matematika yang menggambarkan syarat keanggotaanya.

Contoh

1. Kata-kata
   Himpunan bilangan prima yang kurang dari 20
2. Mendaftar anggotanya
   $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
   Notasi pembentuk himpunan
   $P = \{x \mid x < 20, x \in \text{ bilangan prima}\}$

7. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong disimbolkan dengan $\{\ \}$ atau ϕ.

Contoh

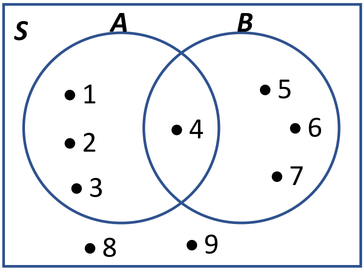
Himpunan bilangan asli antara 3 dan 4, berarti $T = \{\ \}$. T tidak mempunyai anggota, jadi $n(T) = 0$.

8. Diagram Venn

Cara menyajikan himpunan juga bisa dinyatakan dengan gambar atau diagram yang disebut dengan Diagram Venn. Diagram Venn diperkenalkan oleh pakar matematika Inggris bernama ***John Venn*** (1834 – 1923).

Contoh

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan $B = \{4, 5, 6, 7\}$

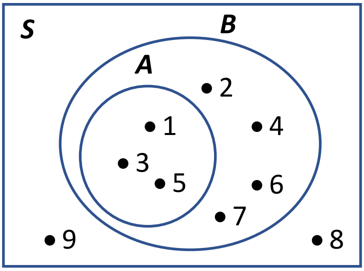


9. Himpunan Bagian

Himpunan A disebut sebagai himpunan bagian dari B jika setiap anggota A juga menjadi anggota himpunan B. Lambang yang menyatakan himpunan bagian adalah "$\subset$ ".

Contoh

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, himpunan A = {1, 3, 5} dan himpunan B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}



Dari diagram venn di atas maka $A \subset B$ dibaca "*A himpunan bagian dari B*" atau dapat juga dikatakan $B \supset A$ dibaca " *B memuat A*".

10. Operasi Himpunan

a. Irisan

Irisan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota A sekaligus anggota B. Secara matematis ditulis: $A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$.

b. Gabungan

Gabungan dari A dan B adalah himpunan yang semua anggotanya terdapat pada A atau B. Secara matematis ditulis: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

c. Komplemen

Komplemen A adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan *anggota S yang bukan anggota A*. Secara matematis ditulis A' atau $A^c = \{x \mid x \notin A \text{ dan } x \in S\}$.

d. Selisih

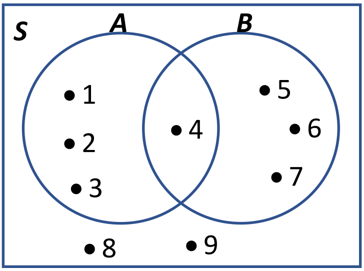
Selisih himpunan A dan B atau $A - B$ adalah himpunan semua anggota A yang tidak ada di B.

Contoh

Diketahui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7\}$, maka

1) $A \cap B = \{4\}$
2) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
3) $A^c = \{5,6,7,8,9\}$
4) $A - B = \{1,2,3\}$
5) $B - A = \{5,6,7\}$

Gambar dalam diagram venn



D. Aturan Pemangkatan dan Pemfaktoran

1. Definisi Bilangan Berpangkat

Jika *n* adalah bilangan bulat positif dan *a* adalah sembarang bilangan bulat, maka

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \quad kali}$$

Contoh

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$(-3)^3 = -3 \times (-3) \times (-3) = -27$$

2. Sifat-sifat Bilangan Berpangkat

a. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

b. $a^m : a^n = a^{m-n} \quad , \ a \neq 0$

c. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d. $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

e. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

f. $a^0 = 1 \quad , a \neq 0$

g. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

Contoh

a. $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$

b. $-7^4 : (-7)^2 = -7^{4-2} = -7^2$

c. $(4^3)^2 = 4^{3 \times 2} = 4^6$

d. $5^{-2} \times 3^{-2} = 15^{-2}$

e. $\dfrac{6^3}{2^3} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^3 = 3^3$

f. $2^0 = 1$

g. $9^{-2} = \dfrac{1}{9^2} = \dfrac{1}{81}$

3. Pemfaktoran

Berikut ini beberapa cara pemfaktoran bentuk aljabar

a. Pemfaktoran bentuk $ax + bx$

$ax + bx = x(a+b)$

Contoh

$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

b. Pemfaktoran bentuk $ax^2 + bx + c$ untuk $a = 1$

$ax^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$

Dimana $m \cdot n = c$ dan $m + n = b$

Contoh

$x^2 + 3x - 18 = (x+6)(x-3)$

c. Pemfaktoran bentuk $ax^2 + bx + c$ untuk $a \neq 1$

$ax^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$

Dimana $m \cdot n = a \cdot c$ dan $m + n = b$

Contoh

$2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)(x+2)$

d. Pemfaktoran bentuk $m^2 - n^2$

$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$

Contoh

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

E. Pecahan, Desimal, Persentase

1. Pengertian Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan dapat didefinisikan sebagai $\frac{a}{b}$; dimana a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. a disebut pembilang dan b disebut penyebut.

2. Jenis-jenis bilangan pecahan

a. Pecahan Biasa

Pecahan biasa adalah pecahan dengan pembilang dan penyebutnya merupakan bilangan bulat.

Contoh: $\frac{1}{3}, \frac{5}{7}, \frac{11}{6}, \frac{8}{5}$

b. Pecahan Campuran

Pecahan campuran didefinisikan sebagai $c\frac{a}{b}$; dimana *a, b, c* bilangan bulat.

Contoh: $\frac{8}{5}(biasa) = 1\frac{3}{5}(campuran)$

1) Cara mengubah pecahan biasa ke pecahan campuran

$\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3$ sisa 1 maka $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

2) Cara mengubah pecahan campuran ke pecahan biasa

$$c\frac{a}{b} = \frac{b \times c + a}{b}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{4 \times 2 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

3. Desimal

Pecahan desimal adalah pecahan dengan penyebut 10, 100, 1000 dan seterusnya, lalu diubah penulisannya dengan tanda koma (,).

Contoh:

a. $\frac{1}{10} = 0{,}1$

b. $\frac{5}{100} = 0{,}05$

c. $\frac{25}{10} = 2{,}5$

d. $\frac{3425}{100} = 34{,}25$

1) Cara mengubah pecahan ke bentuk pecahan decimal
   Cara 1 (ubah pecahan menjadi penyebut 10, 100 dan seterusnya)

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

   Cara 2 (menggunakan poro gapit)

$$\frac{1}{4} = ...$$

$$\begin{array}{r|l} & 0{,}25 \\ \hline 4 & 10 \\ & \underline{8}\ - \\ & 20 \\ & \underline{20}\ - \\ & 0 \end{array}$$

2) Cara mengubah pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa

a. $2{,}5 = \frac{25}{10}$

b. $0{,}07 = \frac{7}{100}$

c. $12{,}8 = \frac{128}{10}$

d. $0{,}0012 = \frac{12}{1000}$

4. Persentase

Persentase/persen adalah pecahan dengan penyebut 100. Dengan demikian persen berarti perseratus. Lambang persen adalah %.

1) Cara mengubah pecahan biasa ke bentuk pecahan persen

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 100\%$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3}{25} \times 100\% = 12\%$$

2) Cara mengubah persen ke bentuk pecahan biasa

$$20\% = \frac{20}{100}$$

BAB II
KARAKTERISTIK MATEMATIKA EKONOMI

A. Matematika Ekonomi dan Matematika Murni

Secara sederhana dalam ilmu ekonomi, matematika digunakan sebagai alat analisis. Bila ditinjau dari sejarah, prinsip dasar matematika digunakan untuk kebutuhan perhitungan dalam kegiatan perdagangan, pengukuran tanah, waktu, dan memprediksi kejadian-kejadian terkait astronomi. Pada era Adam Smith, ilmu ekonomi merupakan bagian dari ilmu filsafat, kemudian setelah era Adam Smith mulailah menjadi disiplin ilmu tersendiri (Nachrowi, 2009). Matematika Ekonomi didefinisikan sebagai suatu pendekatan analisis ekonomi menggunakan simbol-simbol matematis dan logika matematika dalam merumuskan teori dan permasalahan ekonomi (Chiang & Wainwright, 2005). matematika ekonomi mulai berkembang pada tahun 1950 seiring hijrahnya para ahli matematika menjadi akademisi ekonomi seperti Kenneth Arrow, Gerard Debreu, Hildenbrandt, dan Gerard Debreu.

Sebagai mata kuliah di perguruan tinggi, Matematika Ekonomi merupakan mata kuliah yang membahas konsep-konsep matematika dan penggunaannya dalam menganalisis persoalan ekonomi termasuk ekonomi syariah. Mahasiswa diharapkan mampu melakukan pengukuran-pengukuran kuantitatif pendekatan matematika terhadap berbagai peristiwa ekonomi, memformulasikannya dalam model-model ekonomi guna memperoleh solusi terbaik. Diantara materi kuliah yang umumnya diajarkan di perguruan tinggi adalah sifat dan karakteristik matematika ekonomi, matematika esensial/konsep dasar matematika, fungsi linier dan fungsi non linier serta penerapannya, Barisan dan Deret, Matriks, Kalkulus diferensial, dan pemrogramman linier.

Istilah Matematika berasal diambil dari bahasa Yunani yaitu dari kata "*mathein*" yang berarti "mempelajari". Dalam bahasa Inggris disebut "mathemata" yang kemudian oleh Phytagoras diubah menjadi "mathematics" (Suyitno, 2014), dan dalam bahasa Arab dikenal dengan kata "Ar-Riyadhiyaat". Secara umum matematika murni mencakup topik besar seperti Aljabar, Teori Bilangan, Geometri, Peluang dan

Statistik, dan Analisis. Matematika murni menurut Suyitno (2014) adalah memilih beberapa bidang khusus matematika untuk selanjutnya mengkaji lebih dalam bidang tersebut, misalnya topologi, teori fungsi, teori permainan, dan bidang matematika lainnya. Matematika murni digunakan sebagai dasar untuk memahami matematika terapan. Dalam terapan ekonomi tentu dipilih topik-topik matematika murni apa saja yang relevan untuk digunakan dalam menganalisis permasalahan ekonomi. Beberapa topik matematika dalam ekonomi diantaranya sistem persamaan linier digunakan pada fungsi permintaan dan penawaran; barisan dan deret pada bunga sederhana dan bunga majemuk; persamaan kuadrat pada *profit function* (π); teknik optimasi dan topik matematika lainnya yang relevan.

Dalam penggunaan simbol matematika, matematika murni umumnya menggunakan simbol yang lazim digunakan oleh matematikawan seperti penggunaan huruf (X, Y, Z; *x, y, z; a, b, c*). matematika ekonomi menggunakan simbol menyesuaikan dengan variabel ekonominya seperti dalam fungsi permintaan dan penawaran digunakan simbol P yaitu mewakili harga dan Q mewakili kuantitas atau jumlah barang, variabel lainnya seperti C (cost), L (Labour), i (interest) dan sejumlah variabel ekonomi lainnya. Nilai-nilai variabel dalam matematika murni bisa bernilai negatif atau positif, sedangkan dalam matematika ekonomi diasumsikan harus bernilai positif.

B. Teori Ekonomi dan Matematika

Ciri utama ilmu ekonomi adalah mempelajari perilaku individu dan masyarakat dalam menentukan pilihan untuk menggunakan berbagai sumber daya yang terbatas atau langka dalam upaya menentukan kualitas hidupnya (Rahardja dan Manurung, 2008). Substansi dari ilmu ekonomi kemudian melahirkan teori-teori ekonomi yang dari waktu ke waktu mengalami perkembangan. Secara garis besar teori ekonomi dibagi dalam dua bagian besar yaitu **Teori Ekonomi Mikro** dan **Teori Ekonomi Makro**. Ekonomi Mikro berhubungan dengan proses alokasi sumber daya secara efisien di tingkat individu, perusahaan, dan industri. Teori ekonomi makro menganalisis keseluruhan kegiatan perekonomian, bersifat global, dan tidak memperhatikan kegiatan ekonomi yang dilakukan oleh unit-unit kecil dalam perekonomian. Pelopor ekonomi makro adalah Keynes yang terkenal dengan bukunya berjudul *The General Theory*.

Penggunaan simbol matematika dan grafik dalam pengajaran ilmu ekonomi mulai diperkenalkan oleh kelompok neoklasik (Nachrowi, 2009). Ilmu matematika termasuk teori-teori matematika telah memberi kontribusi dalam perumusan teori ekonomi dan solusi dalam permasalahan ekonomi, misalnya game theory (teori permainan); pemrogramman linier; serta pemodelan matematis dalam membuat model-model ekonomi. Olehnya itu kompleksitas dalam permasalahan ekonomi membutuhkan bantuan ilmu matematika untuk menganalisis ilmu dan teori-teori ekonomi.

C. Ekonometrika dan Statistika Ekonomi

Secara umum ekonometrika didefinisikan sebagai ilmu yang mempelajari analisis kuantitatif dari fenomena ekonomi termasuk ilmu sosial lainnya. Bawono dan Sina (2018) menyimpulkan bahwa ekonometrika adalah ilmu sosial yang merupakan gabungan atau integrasi dari teori ekonomi, matematika ekonomi, dan statistika ekonomi dengan tujuan menguji model-model ekonomi. Pada awalnya kajian ekonometrika hanya berupa aplikasi matematika statistik dengan menggunakan data ekonomi untuk menganalisis model-model ekonomi, kemudian berkembang penggunannya untuk menganalisis berbagai fenomena sosial lainnya. Peran ekonometrika adalah membuktikan teori ekonomi secara empiris. Misal pada fungsi konsumsi dimodelkan

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y$$

C adalah konsumsi, Y pendapatan, β_0 dan β_1 adalah koefisien. β_0 disebut konsumsi otonom yaitu konsumsi yang harus ada walaupun pendapatan bernilai nol, dan β_1 disebut Marginal Propensity to Consume (MPC) adalah besaran yang menunjukkan perubahan konsumsi jika pendapatan naik sebesar satu satuan.

Data merupakan hal mendasar dalam menganalisis masalah ekonomi dan pengambilan keputusan. Ilmu tentang data secara lengkap dipelajari dalam ilmu statistika. Statistika adalah ilmu tentang mengumpulkan, menata, menyajikan, manganalisis, dan menginterpretasikan data menjadi informasi untuk membantu pengambilan keputusan yang efektif. Statistika ekonomi berfungsi mengumpulkan data empiris, mengolah data, melakukan perkiraan parameter model, menguji hipotesis dan ketepatan model. Data-data ekonomi yang dikumpulkan dan dianalisis seperti data Produk Nasional Bruto, tenaga kerja, dan tingkat pengangguran.

Dengan memahami tiga bidang ilmu yang saling berkaitan (matematika, statistika, dan ekonometrika) dalam menganalisis dan menguji secara empiris teori ekonomi maka ilmu ekonomi akan semakin berkembang dan modern serta menyelesaikan berbagai persoalan ekonomi di masa sekarang maupun di masa yang akan datang. Matematika ekonomi menjadi faktor utama dalam memahami statistika ekonomi dan ekonometrika.

D. Model-model Ekonomi

Berdasarkan teori-teori ekonomi dapat disusun model ekonomi yang merupakan pernyataan formal sebuah teori. Model ekonomi adalah konstruksi teoritis atau kerangka analisis yang terdiri dari himpunan konsep, definisi, asumsi, persamaan, dan ketidaksamaan darimana kesimpulan akan diturunkan. Dalam dunia perekonomian yang nyata, hubungan antara variabel ekonomi yang satu dengan lainnya sangat kompleks. Untuk memudahkan hubungan antar variabel, dipilih variabel yang sesuai dengan permasalahan ekonomi lalu dihubungkan sedemikian sehingga hubungan antar variabel ekonomi menjadi bentuk yang sederhana dan mendekati keadaan yang sebenarnya. Penyederhanaan hubungan antar variabel ekonomi ini dapat disebut sebagai model ekonomi. Hubungan antarvariabel ekonomi dapat dinyatakan dalam bahasa matematika. Bentuk model ekonomi bisa berupa model matematika dan non matematika. Bila model ekonomi berbentuk model matematika maka akan terdiri satu atau beberapa persamaan. Setiap persamaan bisa memuat variabel, koefisien, konstanta, dan parameter.

Model yang baik dapat dilihat dari variabel yang digunakan serta mudah diaplikasikan. Variabel adalah ukuran yang nilainya dapat berubah dari waktu ke waktu dan dari observasi ke observasi. Contoh model ekonomi diantaranya **Model Siklus Lingkaran Kegiatan Ekonomi**. Model ini menjelaskan kesibukan pabrik-pabrik, antrian panjang pekerja dan aktivitas ekonomi di dunia nyata sebenarnya hanya merupakan proses pertukaran sumber daya yang dimiliki rumah tangga atau masyarakat dengan yang dimiliki sektor perusahaan (dunia usaha).

Beberapa model dan problem dalam ekonomi modern dan keuangan dapat dinyatakan dalam bahasa matematika dan dianalisis menggunakan teknik-teknik matematika. Model-model ekonomi dalam bentuk model matematika diantaranya model produksi dengan satu faktor produksi variabel. Hubungan matematis penggunaan faktor produksi yang menghasilkan output maksimum dituliskan

$$Q = f(K, L)$$

dengan Q tingkat output, K barang modal, dan L tenaga kerja. Dalam model ini barang modal dianggap faktor produksi tetap. Keputusan produksi ditentukan berdasarkan alokasi efisiensi tenaga kerja.

BAB III
FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI

Aplikasi atau penerapan matematika dalam bidang ekonomi yang akan didiskusikan dalam bab ini adalah fungsi linier dalam ekonomi berupa fungsi permintaan, fungsi penawaran, keseimbangan pasar satu produk serta keseimbangan pasar dua macam produk.

Dalam kegiatan ekonomi yang berkaitan dengan hasil komoditas barang-barang tertentu sering dipengaruhi oleh keterkaitan antara peubah bebas dan peubah terikat yang membentuk sebuah fungsi, secara umum peubah bebas paling dominan yang memiliki hubungan dengan satu peubah terikat (jumlah permintaan sebuah jasa atau produk) dapat diidentifikasi yaitu: harga produk, pendapatan konsumen, harga produk lain yang terkait, prediksi harga produk periode yang akan datang, serta selera pemakai/konsumen.

A. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan merupakan fungsi yang berhubungan dengan banyaknya permintaan sebuah produk atau jasa. Fungsi yang berkaitan dengan konsumen atau jumlah permintaan sebuah produk disebut dengan fungsi permintataan (*demand function)* (Suharso, 2014). Secara umum peubah bebas dan terikat memiliki hubungan sebagai berikut:

$$Q_{dx,t} = f\left(P_{x,t}, P_{y,t}, Y_t, P^e_{x,t+1}, S_t\right)$$

Keterangan:

$Q_{dx,t}$ = banyaknya perminataan produk/jasa x pada periode t

$P_{x,t}$ = nilai produk/jasa x pada periode t

$P_{y,t}$ = nilai produk/jasa y yang terkait pada periode t

Y_t = penghasilan konsumen dalam periode t

$P^e_{x,t+1}$ = perkiraan harga produk x pada periode akan datang $(t+1)$

S_t = selera konsumen pada periode t.

Dari fungsi permintaan diatas, beberapa kemungkinan fungsi satu peubah terhadap peubah terikat dengan mempertimbangkan peubah yang lainnya tetap atau konstan, yaitu:

1. $Q_{dx,t} = f\left(P_{x,t}\right)$ memiliki keterkaitan yang negatif
2. $Q_{dx,t} = f\left(P_{y,t}\right)$ memiliki keterkaitan yang negatif atau positif
3. $Q_{dx,t} = f(Y_{t+1})$ memiliki keterkaitan yang negatif atau positif
4. $Q_{dx,t} = f\left(P^{e}_{x,t+1}\right)$ memiliki keterkaitan yang positif
5. $Q_{dx,t} = f(S_t)$ memiliki keterkaitan yang positif

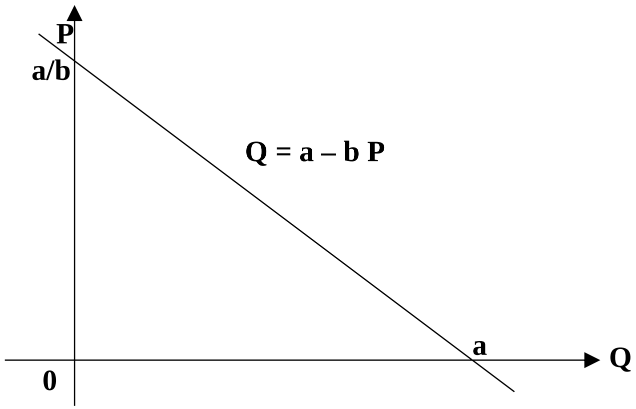
Dari kelima kemungkinan tersebut yang sangat kuat mempengaruhi yaitu hubungan antara peubah jumlah permintaan (produk/jasa yang diminta konsumen atau pemakai) dengan harga produk tersebut dan peubah lain yang diasumsikan konstan. Secara khusus karena tidak ada pengaruh peubah lain, maka fungsi permintaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk formula:

$$Q = f(P) \text{ dengan } Q = a - bP$$

Dimana:

Q = jumlah perminataan produk
P = harga produk
a = penggal garis sumbu Q
b = kemiringan (*slope*) fungsi

Nilai negatif *slope* fungsi merupakan ciri utama fungsi permintaan, dengan artikata semakin naiknya harga produk atau barang, maka semakin rendahnya jumlah permintaan (hukum permintaan). Secara jelas dapat digambarkan pada grafik berikut ini:



Grafik dalam penerapan dibidang ekonomi berbeda dengan grafik fungsi dalam matematika. Koefisien bebas (P) dalam ilmu matematika digambarkan sebagai ordinat (sumbu-y), namun dalam penerapan ekonomi sebaliknya.

Analisis tentang permintaan konsumen didasari pada hukum permintaan yang menyatakan bahwa jika harga suatu barang atau jasa naik, maka jumlah barang atau jasa yang diminta akan turun. Sebaliknya, jika harga suatu barang atau jasa turun, maka jumlah barang dan jasa yang diminta akan naik; dengan syarat faktor-faktor lain dianggap tidak berubah.

Hukum permintaan tersebut hanya menjelaskan hubungan antara harga dengan jumlah barang atau jasa yang diminta. Adapun indikator lain yang mempengaruhi naik turunnya permintaan, dianggap tidak berubah. Apabila indikator tersebut berubah maka secara otomatis hukum permintaan tersebut tidak berlaku lagi.

Contoh 1

Harga suatu barang atau produk adalah 6 satuan mata uang, permintaan konsumen 24 unit. Akan tetapi ketika harga naik menjadi 10 satuan mata uang ternyata permintaan turun menjadi 12 unit. Gambarkan grafik dari fungsi permintaan tersebut

Penyelesaian:

Formula persamaan fungsi dari dua titik yang diketahui ialah:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

Dimana:

$P_1 = 6$

$Q_1 = 24$

$P_2 = 10$

$Q_2 = 12$

$$\frac{P - 6}{10 - 6} = \frac{Q - 24}{12 - 24}$$

$$\frac{P - 6}{4} = \frac{Q - 24}{-12}$$

$(P - 6)(-12) = (Q - 24)(4)$

$-12P + 72 = 4Q - 96$

$-12P = 4Q - 96 - 72$

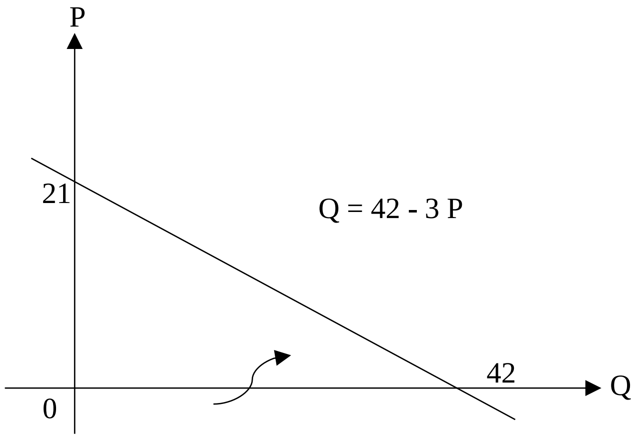
$-12P = 4Q - 168$

$-3P = Q - 42$

Atau

$Q - 42 = -3P$

$Q = 42 - 3P$



Terbukti bahwa karakteristik fungsi permintaan memiliki kemiriangan yang negative, hal yang demikian menunjukkan bahwa harga semakin tinggi maka jumlah permintaan akan menurun

B. Fungsi Penawaran

Penawaran merupakan banyaknya Jasa yang ditawarkan oleh produsen kepada pemakai atau konsumen pada tingkat harga dan waktu tertentu (Tjolleng, 2019). Fungsi penawaran memiliki orientasi keterkaitan kebalikkan dari fungsi permintaan antara peubah terikat (jumlah penawaran) dan peubah bebas (harga), oleh karena itu sifat keterkaitan positif. Keterkaitan positif artinya bahwa ketika jumlah penawaran naik maka harga akan naik pula, begitu juga sebaliknya, kasus disebut dengan hukum penawaran.

Sama halnya dengan permintaan, syarat faktor tertentu tetap mengandung makna bahwa hukum penawaran hanya berlaku bila indikator lain yang mempengaruhi naik turunnya penawaran tidak berubah. Apabila indikator lainya tersebut berubah, maka hukum penawaran tidak berlaku lagi. Berikut hubungan matematika secara umum antara beberapa peubah bebas dan satu peubah terikat dalam fungsi penawaran:

$$Q_{sx,t} = f\left(P_{x,t}, T_t, P_{F,t}, P_{R,t}, P^e_{x,t+1}\right)$$

Keterangan:

$Q_{sx,t}$ = banyaknya penawaran produk atau jasa x oleh produsen dalam waktu t

$P_{x,t}$ = nilai produk atau jasa x dalam waktu t

T_t = teknologi yang tersedia dalam waktu t

$P_{F,t}$ = indicator atau faktor produksi dalam waktu t

$P_{R,t}$ = nilai produk atau jasa lain yang terkait dalam periode t

$P^e_{x,t+1}$ = ekspektasi produsen terhadap harga produk atau jasa x dalam waktu yang akan datang (t+1)

Dari fungsi penawaran banyak peubah bebas terhadap satu peubah terikat tersebut dapat dibentuk beberapa kemungkinan fungsi satu peubah bebas terhadap satu peubah terikat dengan mempertimbangkan peubah yang lainnya tetap atau konstan.

Beberapa kemungkinan tersebut ialah:

1. $Q_{sx,t} = f\left(P_{x,t}\right)$ memiliki keterkaitan yang positif
2. $Q_{sx,t} = f(T_t)$ memiliki keterkaitan yang positif
3. $Q_{sx,t} = f\left(P_{F,t}\right)$ memiliki keterkaitan yang negative
4. $Q_{sx,t} = f\left(P^e_{x,t+1}\right)$ memiliki keterkaitan yang negative
5. $Q_{sx,t} = f\left(P_{R,t}\right)$ memiliki keterkaitan yang positif

Kelima keterkaitan antara satu peubah bebas dan satu peubah terikat tersebut yang sangat kuat pengaruhnya adalah hubungan antara peubah jumlah penawaran dan harga produk, Adapun peubah yang lain diasumsikan konstan. Fungsi penawaran yang dimaksud adalah $Q = f(P)$

Bentuk umum fungsi penawaran memenuhi persamaan:

$$Q = a + b\,P$$

Keterangan:

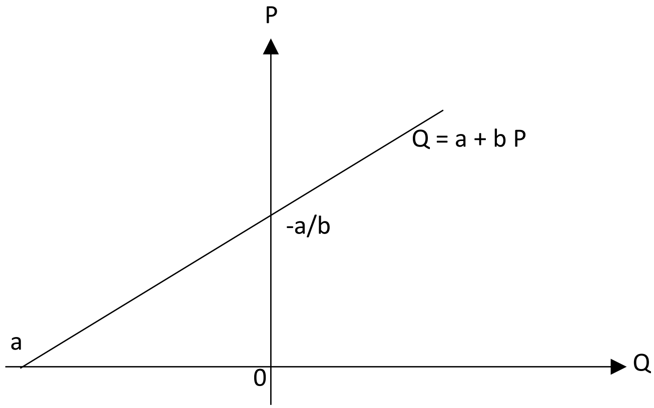
Q = jumlah penawaran

P = harga produk

a = penggal garis sumbu Q

b = kemiringan (*slope*) fungsi

Nilai positif slope fungsi merupakan ciri utama fungsi penawaran, artinya bahwa semakin tingginya harga produk, maka semakin tinggi pula jumlah penawaran oleh produsen, secara umum dapat digambarkan pada grafik berikut:



Contoh 2

Pada saat jumlah penawaran 18 unit, harga produk tersebut adalah 12 satuan mata uang. Demikian halnya saat jumlah penawaran naik menjadi 24 unit maka harga naik pula menjadi 14 satuan mata uang. Gambarkan grafik fungsi penawaran tersebut!

Penyelesaian

Formula persamaan fungsi dari dua titik yang diketahui adalah:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

Dimana:

$P_1 = 12$
$Q_1 = 18$
$P_2 = 14$
$Q_2 = 24$

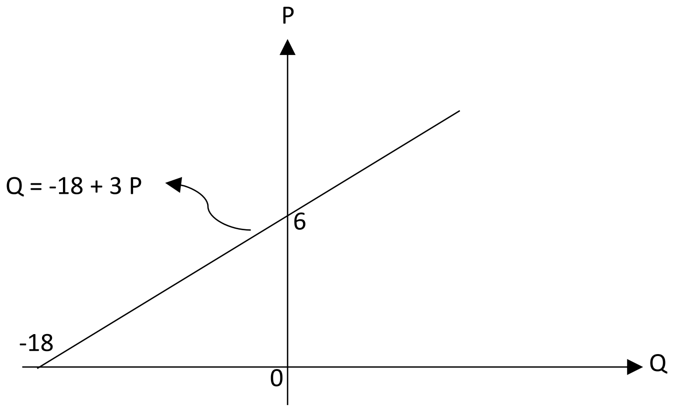
$$\frac{P - 12}{14 - 12} = \frac{Q - 18}{24 - 18}$$

$$\frac{P - 12}{2} = \frac{Q - 18}{6}$$

$$(P - 12)6 = (Q - 18)2$$

$$6P - 72 = 2Q - 36$$
$$2Q = 6P - 36$$
$$Q = -18 + 3P$$

Dengan grafik sebagai berikut:



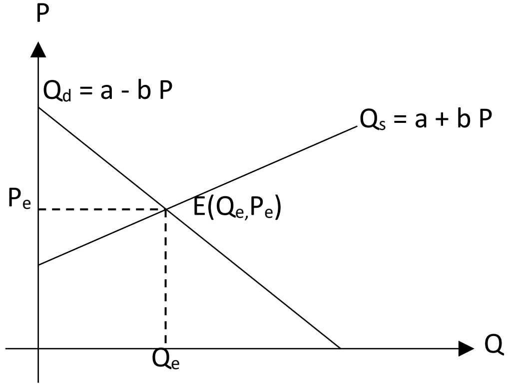
Terbukti bahwa karakteristik fungsi penawaran memiliki kecenderungan yang positif, yaitu Ketika jumlah penawaran naik atau tinggi, maka harga akan mengikuti naik pula.

C. Keseimbangan Pasar Satu Produk

Keseimbangan pasar terjadi dengan adanya fungsi permintaan dan penawaran. Keseimbangan pasar merupakan suatu keadaan ketika jumlah barang dan harga yang ditawarkan oleh produsen sama dengan jumlah dan barang yang diminta oleh konsumen (Tjojjeng, 2019).

Keseimbangan tersebut ditunjukkan oleh perpotongan kurva antara kurva permintaan dan kurva penawaran atau yang disebut dengan titik keseimbangan pasar (*ekuilibrium*). Titik keseimbangan pasar tersebut mampu bertahan dalam jangka waktu tertentu apa bila produsen dan konsumen sama sama diuntungkan atau setidaknya hanya mengalami kerugian yang sangat kecil. Secara matematis keseimbangan pasar terjadi apabila: $Q_d = Q_s$ atau $P_d = P_s$. Titik keseimbangan pasar di notasikan dengan (Q_e, P_e).

Keseimbangan pasar dapat digambarkan pada grafik berikut



Keterangan:

Q_d = banyaknya/jumlah permintaan produk
Q_s = banyaknya/jumlah penawaran produk
E = keseimbangan pasar
P_e = harga keseimbangan
Q_e = banyaknya/jumlah keseimbangan

Ingat:

Permasalah yang berkaitan dengan ekonomi secara matematis, hanya ada pada kuadrat pertama (1), karena semua nya bernilai positif baik harga (P) maupun jumlah produk/jasa (Q).

Contoh 3

Fungsi permintaan atas sebuah komoditas barang atau jasa tertentu ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 19 - 2\text{ P}$, sementara fungsi penawaran dari pihak produsen memenuhi persamaan $Q_s = -6 + 3\text{ P}$. hubungan harga dan jumlah produk komoditas tersebut dari kedua pihak, yaitu dari sisi konsumen maupun produsen maka selesaikanlah beberapa pertanyaan berikut:

1. Berapa jumlah dan harga produk dalam keseimbangan pasar?
2. Gambarkan grafik kondisi keseimbangan pasar tersebut!

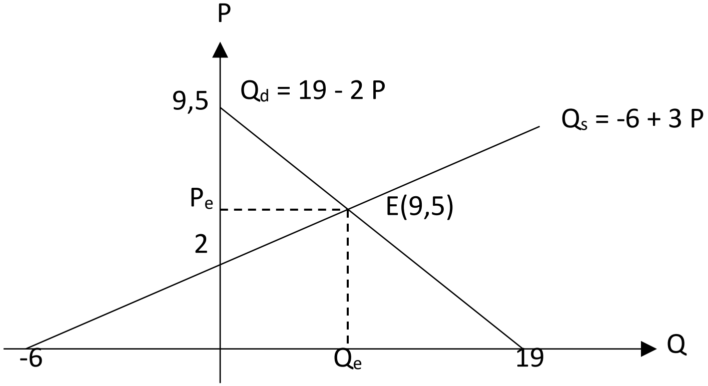
Penyelesaian

Fungsi permintaan dan fungsi penawaran tersebut membentuk suatu sistem persamaan linier dan analisis dengan pendekatan cara subsitusi, yaitu: nilai Q_d disubsitusikan pada Q_s
$(Q_d = Q_s)$. hasilnya
$19 - 2P = -6 + 3P$ atau
$19 + 6 = 3P + 2P$,
$25 = 5P$,
$P_e = 5$,

Dan selanjutnya P_e tersebut disubsitusikan ke dalam salah satu persamaan Q_s atau persamaan Q_d. jawaban $Q_e = 9$, jadi keseimbangan pasar yang terjadi pada titik koordinat $E(Q_e P_e)$ atau $E(9,5)$

Menggambar grafik
Fungsi permintaan $Q_d = 19 - 2P$
Ketika grafik memotong sumbu Q artinya bahwa $P = 0$, sehingga titik potong berada di $Q = 19 - 2(0) = 19$. Titik koordinatnya adalah (19,0)
Ketika grafik memotong sumbu P artinya Q = 0, sehingga titik potong 0 = 19 – 2P berada di $P = 9,5$. Titik koordinatnya $(0; 9,5)$
Fungsi penawaran $Q_s = -6 + 3P$
Ketika grafik memotong sumbu Q artinya bagwa $P = 0$, sehingga titik potong berada di $Q = -6 + 3(0) = -6$. Titik koordinatnya adalah $(-6,0)$
Ketika grafik memotong sumbu P artinya bahwa $Q = 0$, sehingga titik pemotong $0 = -6 + 3P$ berada di $P = 2$. Titik koordinatnya adalah $(0,2)$

Dari koordinat yang sudah diperoleh grafik sebagai berikut:



D. Keseimbangan Pasar Dua macam Produk

Keseimbangan pasar yang telah dipelajari pada poin c merupakan keseimbangan untuk satu jenis produk atau jasa jadi tidak ada tanda indeks untuk membedakan jenis produk yang satu dengan jenis yang lain. Bagaimana kemudian Ketika kondisi pasar tersebut dipengaruhi oleh 2 jenis produk atau jasa "misal produk atau jasa x dan produk atau jasa y yang saling terkait" maka masing-masing fungsi mewakili setiap jenis produk atau jasa dengan indeks yang berbeda, yaitu:

Fungsi untuk permintaan

$$Q_{dx} = a_0 - a_1 P_x + a_2 P_y$$
$$Q_{dy} = b_0 + b_1 P_x - b_2 P_y$$

Fungsi untuk penawaran

$$Q_{sx} = -m_0 + m_1 P_x - m_2 P_y$$
$$Q_{sy} = n_0 - n_1 P_x + n_2 P_y$$

Keterangan:

Q_{dx} = jumlah atau banyaknya permintaan produk/jasa x

Q_{sx} = jumlah atau banyaknya penawaran produk/jasa x

Q_{dy} = jumlah atau banyaknya permintaan produk/jasa y

Q_{sy} = jumlah atau banyaknya penawaran produk/jasa y
P_x = harga produk x
P_y = harga produk y
a_0, b_0, m_0, n_0 merupakan bilangan constanta

Keseimbangan pasar akan terjadi bila banyaknya permintaan produk atau jasa x sama dengan banyaknya penawaran produk atau jasa x dinotasikan "$(Q_{dx} = Q_{sx})$", dan banyaknya permintaan produk y sama dengan banyaknya penawaran produk y dinotasikan "$(Q_{dy} = Q_{sy})$". Analisis selanjutnya ialah hasil subsitusi masing-masing pasangan fungsi perminataan dan fungsi penawaran setiap jenis produk atau jasa, dengan hasil masing-masing yaitu P_{ex} dan P_{ey}. Nilai-nilai banyaknya produk dalam kondisi keseimbangan masing-masing produk atau jasa yaitu Q_{ex} dan Q_{ey}

Contoh 4

Fungsi permintaan dan fungsi penawaran masing-masing produk atau jasa, yaitu produk x dan produk y dapat ditentukan oleh persamaan berikut:

$$Q_{dx} = 6 - 2P_x + P_y$$
$$Q_{dy} = 10 + P_x - P_y$$

$$Q_{sx} = -3 + 3P_x - P_y$$

$$Q_{sy} = -4 - P_x + 2P_y$$

Dari persamaan tersebut, hitungkah jumlah dan harga produk dalam keseimbangan pasar!

Penyelesaian

Dengan menggunakan metode substitusi diperoleh:
Nilai Q_{dx} pada persamaan $Q_{sx} = -3 + 3P_x - P_y$ yaitu,

$$6 - 2P_x + P_y = -3 + 3P_x - P_y$$
$$0 = -9 + 5P_x - 2P_y \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Nilai Q_{dy} pada persamaan $Q_{sy} = -4 - P_x + 2P_y$ yaitu,

$$10 + P_x - P_y = -4 - P_x + 2P_y$$
$$0 = -14 - 2P_x + 3P_y \ldots\ldots\ldots\ldots.(**)$$

Dari persamaan (*) dan (**) dengan menggunakan metode elimasi diperoleh:

$0 = -9 + 5P_x - 2P_y$ x 3
$0 = -14 - 2P_x + 3P_y$ x 2

Menjadi

$$0 = -27 + 15P_x - 6P_y$$
$$0 = -28 - 4P_x + 6P_y$$
$$0 = -55 + 11P_x$$

Atau

$$-11P_x = -55$$
$$P_x = \frac{-55}{-11} = 5$$

Substitusikan nilai $P_x = 5$ ke salah satu persamaan, kita ambil persamaan yang pertama yaitu $0 = -9 + 5P_x - 2P_y$, maka

$$0 = -9 + 5(5) - 2P_y$$
$$0 = 16 - 2P_y$$
$$-2P_y = -16$$
$$P_y = \frac{-16}{-2} = 8$$

Jadi harga keseimbangan produk x (P_{ex}) yaitu 5, dan harga keseimbangan produk y (P_{ey}) yaitu 8. Selanjutnya kita akan menghitung jumlah produk keseimbangan pasar setiap jenis produk adalah

$Q_{ex} = 6 - 2(5) + 8 = 4$ (untuk permintaan produk x)
$Q_{ey} = 10 + 5 - 8 = 7$ (untuk permintaan produk y)

Jadi, titik keseimbangan pasar untuk jenis produk x dan jenis produk y masing-masing adalah

$E_x(Q_{ex}: P_{ex}) = (4,5)$ dan $E_y(Q_{ey}: P_{ey}) = (7,8)$

BAB IV
APLIKASI FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI

A. Pengaruh Pajak pada Keseimbangan Pasar

Penjualan atas suatu produk biasanya dikenakan pajak oleh pemerintah. Jika produk tersebut dikenakan **pajak t per unit**, maka akan terjadi perubahan keseimbangan pasar atas produk tersebut, baik harga maupun jumlah keseimbangan. Jadi, jika pemerintah mengenakan pajak t per unit pada produk tertentu akan mengakibatkan harga produk tersebut naik dan jumlah yang diminta/ditawarkan atas barang tersebut akan berkurang. Hal ini dikarenakan bahwa produsen biasanya mengalihkan tanggungan pajaknya sebagian kepada konsumen yang akan membeli produk tersebut.

Jika fungsi permintaan adalah:

$P = f(Q)$ .... (1)

fungsi penawaran sebelum dikenakan pajak **t** per unit adalah:

$P = F(Q)$ .... (2)

dan fungsi penawaran setelah dikenakan pajak **t** per unit adalah:

$P_t = F(Q) + t$ .... (3)

maka keseimbangan pasar yang baru E_t (Q_t, P_t) diperoleh dengan memecahkan Persamaan (1) dan (3), yaitu:

$$P = f(Q) \text{ dan } P_t = F(Q) + t$$

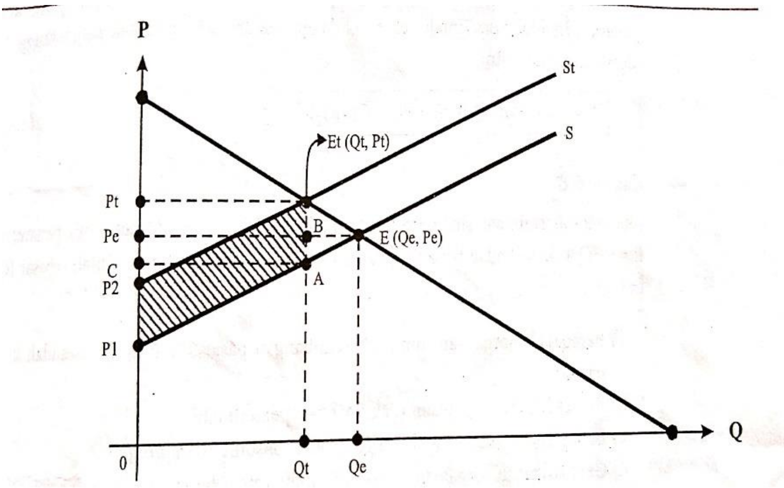
Sedangkan keseimbangan pasar mula-mula E_t (Q_t, P_t) diperoleh dengan memecahkan persamaan (1) dan (2), yaitu:

$$P = f(Q) \text{ dan } P = F(Q)$$

Keseimbangan pasar mula-mula dan keseimbangan pasar setelah kena pajak dapat dilihat pada gambar 4.1.

Secara geometri, pajak yang dikenakan oleh pemerintah sama dengan menggeserkan kurva penawaran mula-mula ke atas setinggi **t** per unit.

Kasus lain dapat terjadi bila fungsi penawaran mula-mula berbentuk **Q = G(P)**, maka ada kemungkinan bagi kita untuk menyelesaikan ke dalam bentuk P = f(Q) yang lebih mudah.



Gambar 4.1. Keseimbangan Pasar Mula-Mula dan Setelah Kena Pajak (Kalangi, 2012)

Tetapi jika tidak, fungsi penawaran setelah pajak adalah:

P – t = F(Q) .... (4)

dan jumlah yang ditawarkan adalah

Q = G(P_t – t) .... (5)

Sedangkan keseimbangan pasar setelah kena pajak dapat diperoleh dengan memecahkan persamaan (4) dan (5), yaitu:

Permintaan: P = f(Q)

Penawaran: Q = G(P_t – t)

Penerimaan pajak total oleh pemerintah adalah:
$T = t \times Q_t$ .... (6)

dimana:
T = jumlah penerimaan pajak oleh pemerintah
Q_t = jumlah keseimbangan setelah dikenakan pajak
t = pajak per unit produk

Penerimaan pajak total **T** oleh pemerintah ditunjukkan oleh luas jajaran genjang $P_1AE_tP_2$ pada gambar 1. Penerimaan pajak total T oleh pemerintah sebagian ditanggung oleh produsen dan sebagian pula ditanggung oleh konsumen. Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah luas segi empat $P_eBE_tP_t$ atau dapat dirumuskan, yaitu:
$(P_t - P_e)\ (0Q_t)$ .... (7)

Sedangkan pajak yang ditanggung oleh produsen adalah luas segi empat P_eBAC atau penerimaan total pemerintah dikurangi dengan besarnya beban pajak yang ditanggung oleh konsumen, yaitu:
$T - \{(P_t - P_e)\ (0Q_t)\}$ atau $(P_e - C)\ (0Q_t)$ .... (8)

Contoh 4.1
Jika fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 3. Terhadap produk tersebut dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar Rp 3 per unit.

a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah dikenakan pajak?
b. Berapakah besar penerimaan pajak total oleh pemerintah?
c. Berapakah besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen?
d. Gambarkanlah harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan setelah pajak dalam satu diagram!

Penyelesaian:
a. ***Keseimbangan sebelum dikenakan pajak***
$P_d = P_s$ maka $15 - Q = 0.5\ Q + 3$

$$- Q - 0{,}5Q = 3 - 15$$
$$- 1{,}5Q = - 12$$
$$Q = \frac{-12}{-1{,}5} = 8$$

Maka, untuk mencari nilai P adalah dengan mensubstitusikan Q = 8 ke salah satu fungsi. Baik ke fungsi permintaan ataupun fungsi penawaran.

$P = 15 - Q$
$P = 15 - 8$
$P = 7$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum dikenakan pajak adalah:
Q = 8, **P = 7** dan **E (8,7)**

Keseimbangan setelah dikenakan pajak

Permintaan: $P_d = 15 - Q$
Penawaran setelah pajak: $P_{st} = 0{,}5Q + 3 + t$
$P_{st} = 0{,}5Q + 3 + 3$
$P_{st} = 0{,}5Q + 6$

Jika $P_d = P_{st}$ maka $15 - Q = 0.5Q + 6$
$$- Q - 0{,}5Q = 6 - 15$$
$$- 1{,}5Q = - 9$$
$$Q = \frac{-9}{-1{,}5} = 6$$

Maka, untuk mencari nilai P adalah dengan mensubstitusikan Q = 6 ke salah satu fungsi. Baik ke fungsi permintaan ataupun fungsi penawaran.

$P = 15 - Q$
$P = 15 - 6$
$P = 9$

Jadi, keseimbangan pasar setelah dikenakan pajak adalah:
Q_t = 6, **P_t = 9** dan **E_t (6,9)**

b. Penerimaan pajak total oleh pemerintah:

$$T = t \times Q_t$$
$$T = (3)\ (6) = 18$$

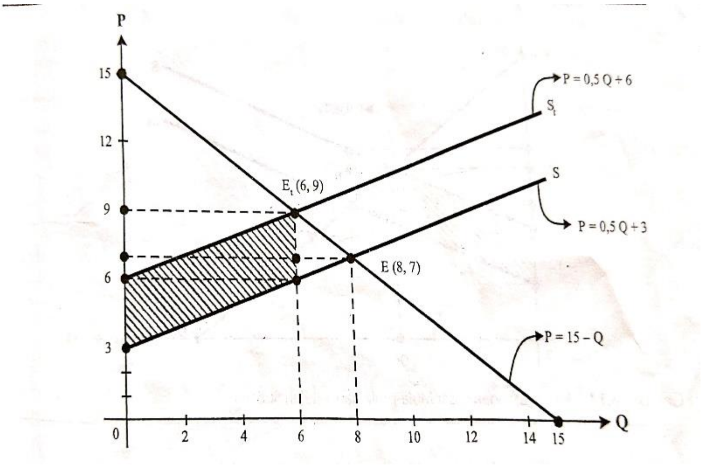
c. Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen:

$$(P_t - P_e)\ (0Q_t)$$
$$(9 - 7)\ (6) = 12$$

Besarnya pajak yang ditanggung oleh produsen:

$$T - \{(P_t - P_e)\ (0Q_t)\} \text{ atau } (P_e - C)\ (0Q_t)$$
$$18 - 12 = 6 \text{ atau } (7 - 6)\ (6) = 6$$

d. Grafik keseimbangan pasar setelah kena pajak ini dapat dilihat pada gambar 4.2 di bawah ini:



Gambar 4.2. Keseimbangan Pasar Setelah Pajak E_t (6,9) (Kalangi, 2012)

B. Pengaruh Subsidi pada Keseimbangan Pasar

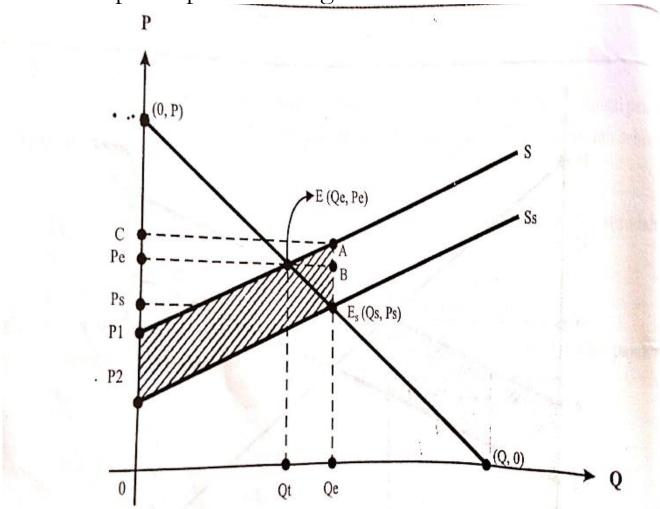
Jika pemerintah memberikan subsidi atas suatu produk tertentu, harga yang dibayarkan oleh konsumen akan turun, sedangkan jumlah yang diminta atas produk tersebut akan bertambah. Penurunan harga tersebut adalah sebesar **subsidi s** yang diberikan oleh pemerintah. Secara geometri, penurunan harga ini adalah pergeseran kurva penawaran sejauh **s** per unit. Jika fungsi permintaan mula-mula P = f(Q), fungsi penawaran sebelum subsidi adalah P = F(Q), dan fungsi penawaran setelah diberikan subsidi adalah,

P = F(Q) – s .... (9)

maka keseimbangan pasar yang baru setelah diberikan subsidi oleh pemerintah E_s (Q_s, P_s) diperoleh dengan memecahkan secara serentak persamaan (1) dan (9), yaitu:

P = f(Q) dan P = F(Q) – s

Titik keseimbangan pasar baru setelah diberikan subsidi oleh pemerintah tampak seperti dalam gambar 4.3



Gambar 4.3. Keseimbangan Pasar Mula-Mula dan Setelah Subsidi (Kalangi, 2012)

Besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah adalah:

S = s × Q_s .... (10)

dimana:

S = jumlah subsidi yang diberikan pemerintah

Q_s = jumlah produk setelah subsidi
s = subsidi per unit produk

Besarnya produk yang diberikan oleh pemerintah ditunjukkan oleh luas jajaran genjang $P_1AE_sP_2$ dalam gambar 4.3. Subsidi ini sebagian dinikmati oleh produsen dan sebagian lagi dinikmati oleh konsumen. Besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen adalah segi empat $P_sE_sBP_e$, yaitu:

$(P_e – P_s)$ $(0Q_s)$ .... (11)

Sedangkan besarnya subsidi yang dinikmati oleh produsen adalah segi empat P_eBAC atau besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah dikurangi dengan besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen, yaitu:

S – [$(P_e – P_s)$ $(0Q_s)$] atau $(C – P_c)$ $(0Q_s)$ .... (12)

Contoh 4.2

Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 3. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 1,5 per unit produk.

a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah subsidi?
b. Berapa besar subsidi yang diberikan oleh pemerintah?
c. Berapa besar subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan produsen?
d. Gambarkanlah dalam satu diagram!

Penyelesaian:

a. ***Keseimbangan sebelum subsidi***

$P_d = P_s$ maka $15 – Q = 0.5\,Q + 3$

$– Q – 0,5Q = 3 – 15$

$– 1,5Q = – 12$

$Q = \frac{-12}{-1,5} = 8$

Maka, untuk mencari nilai P adalah dengan mensubstitusikan Q = 8 ke salah satu fungsi. Baik ke fungsi permintaan ataupun fungsi penawaran.

$P = 15 - Q$

$P = 15 - 8$

$P = 7$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah:

Q = 8, **P = 7** dan **E (8,7)**

Keseimbangan setelah subsidi

Permintaan: $P_d = 15 - Q$

Penawaran setelah subsidi: $P_{ss} = 0{,}5Q + 3 - s$

$P_{ss} = 0{,}5Q + 3 - 1{,}5$

$P_{ss} = 0{,}5Q + 1{,}5$

Jika $P_d = P_{ss}$ maka $15 - Q = 0.5Q + 1{,}5$

$-Q - 0{,}5Q = 1{,}5 - 15$

$-1{,}5Q = -13{,}5$

$Q = \frac{-13{,}5}{-1{,}5} = 9$

Maka, untuk mencari nilai P adalah dengan mensubstitusikan Q = 9 ke salah satu fungsi. Baik ke fungsi permintaan ataupun fungsi penawaran.

$P = 15 - Q$

$P = 15 - 9$

$P = 6$

Jadi, keseimbangan pasar setelah subsidi adalah:

Q_s = 9, **P_s = 6** dan **E_s (9,6)**

b. Besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah:

$$S = s \times Q_s$$

$$S = (1{,}5)\ (9) = 13{,}5$$

c. ***Besarnya*** subsidi yang dinikmati oleh konsumen adalah:

$$(P_e - P_s)\ (0Q_s)$$

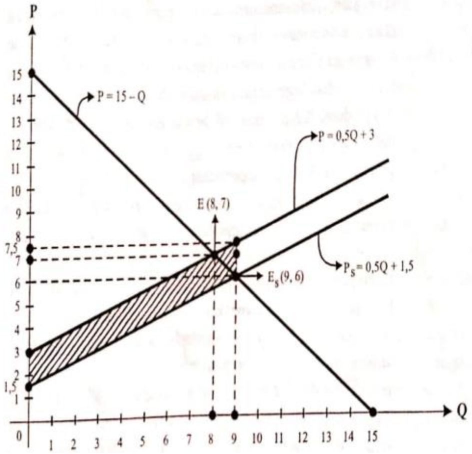
$$(7 - 6)\ (9) = 9$$

Besarnya subsidi yang dinikmati oleh produsen adalah:

$$S - [(P_e - P_s)\ (0Q_s)] \text{ atau } (C - P_c)\ (0Q_s)$$

$$13{,}5 - 9 = 4{,}5 \text{ atau } (7{,}5 - 7)\ (9) = 4{,}5$$

d. ***Grafik*** keseimbangan pasar setelah subsidi ini dapat dilihat pada gambar 4.4



Gambar 4.4. Keseimbangan Pasar setelah Subsidi E_S (9,6) (Kalangi, 2012)

C. Analisis Pulang Pokok

Keberhasilan suatu perusahaan atau bisnis dapat diukur dengan tercapai tidaknya tujuan perusahaan, yaitu memaksimumkan laba perusahaan. Untuk mencapai tujuan perusahaan di atas, biasanya memerlukan penanganan manajemen yang terencana terlebih dahulu dan harus secara akurat menentukan keputusan-keputusan manajerial yang akan diambil di berbagai bidang kegiatan perusahaan, terutama terhadap keputusan di bidang pemasaran dan produksi. Bidang pemasaran bertanggung jawab atas penjualan produknya sebagai penerimaan perusahaan, dan bidang produksi bertanggung jawab atas pengeluaran biaya produksinya. Selanjutnya, pertimbangan penting bagi perusahaan terhadap keputusan pemasaran dan produksi ini adalah memperkirakan atau mengestimasikan volume penjualan atau penerimaannya yang diperoleh dari hasil penjualan produknya selama periode tertentu, kemudian mencari jalan keluar yang cukup aman untuk memastikan bahwa penerimaan tersebut dapat menutupi biaya produksi maupun biaya transportasi, biaya periklanan supaya produk tersebut dapat terjual di pasar.

Umumnya, baik fungsi penerimaan total maupun fungsi biaya total dinyatakan sebagai fungsi linier. Penerimaan total dari penjualan merupakan fungsi dari jumlah produk yang dijual atau secara matematis dapat ditulis TR = f(Q), sedangkan biaya total dari produksi merupakan fungsi dari jumlah yang dihasilkan atau secara matematis dapat ditulis TC = f(Q). Biaya total (TC) ini terdiri dari dua jenis biaya dalam proses produksi, yakni biaya tetap total dan biaya variabel total. *Biaya tetap total tidak tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan, sehingga biaya ini tidak berubah (konstan), walaupun berapa banyak jumlah yang dihasilkan dalam suatu skala tertentu. Sedangkan, biaya variabel total tergantung pada jumlah yang dihasilkan (Q), artinya bila jumlah produk yang dihasilkan berubah maka biaya variabel total akan berubah juga.*

Untuk memperoleh *biaya total (TC) adalah dengan menjumlahkan antara biaya tetap total dengan biaya variabel total.* Jadi, persamaan biaya total dapat ditulis dalam bentuk sistematis seperti,

TC = FC + VQ .... (13)

dimana:

TC = biaya total
FC = biaya tetap total
VQ = biaya variabel total
V = biaya variabel per unit
Q = jumlah produk yang dihasilkan

Selanjutnya, *penerimaan total adalah perkalian antara harga produk per unit dengan jumlah produk yang dijual.* Dengan demikian, persamaan penerimaan total dapat dinyatakan dalam bentuk matematis, yaitu:

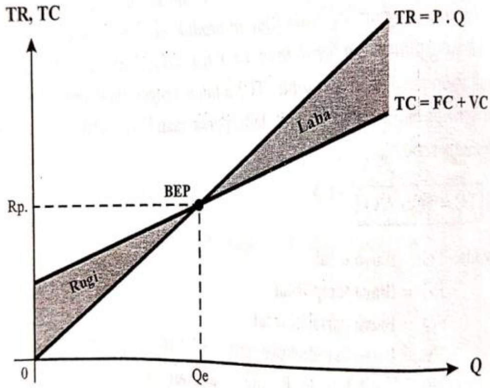
TR = P × Q .... (14)

dimana:
TR = penerimaan total
P = harga produk per unit
Q = jumlah produk yang dijual

Kurva penerimaan total ini bila digambarkan akan berbentuk garis lurus yang melalui titik asal (0,0), karena diasumsikan bahwa harga *P* adalah suatu nilai konstanta. Selain itu, kurva penerimaan total ini akan meningkat seiring dengan peningkatan jumlah produk yang terjual, sedangkan kurva biaya total dinyatakan oleh garis lurus, tetapi melalui titik potong pada sumbu tegak biaya total (TC), karena adanya biaya tetap total (dapat dilihat pada gambar 4.5).

Apabila penerimaan total dari hasil penjualan produk hanya sama dengan biaya total yang dikeluarkan perusahaan, maka perusahaan tidak mendapatkan laba maupun kerugian. Hal inilah yang disebut dengan **pulang pokok** atau **impas** (*break even*). Selanjutnya, analisis titik pulang pokok atau titik impas (*break even point analysis*) adalah tingkat jumlah produk (Q) dimana penerimaan total dari hasil penjualan hanya cukup untuk menutupi biaya produksi yang dikeluarkan perusahaan. Kemudian, jika perusahaan beroperasi pada tingkat jumlah produk (Q) yang lebih besar daripada titik pulang pokok, maka perusahaan akan memperoleh laba (profit). Sebaliknya, jika perusahaan beroperasi pada tingkat jumlah produk (Q) yang lebih kecil daripada titik pulang pokok, maka perusahaan akan mengalami kerugian (*loss*). Jadi, analisis pulang pokok menyatakan bahwa perusahaan mendapatkan laba dan rugi sebesar nol.

Secara geometri titik pulang pokok adalah perpotongan antara kurva penerimaan total dengan kurva biaya total. Hal ini ditunjukkan pada gambar 4.5.



Gambar 4.5. Titik Pulang Pokok (Kalangi, 2012)

Pada gambar 4.5 di titik E adalah titik pulang pokok, karena garis penerimaan total (*TR*) berpotongan dengan garis biaya total (*TC*). Di sebelah kiri titik E pada daerah yang diarsir adalah daerah rugi, sedangkan di sebelah kanan titik pada daerah yang diarsir adalah daerah laba.

Secara aljabar, untuk menentukan titik pulang pokok terdapat dua rumus, yaitu (1) rumus pulang pokok *dalam unit* (*Q*) dan (2) rumus pulang pokok *dalam rupiah* (penerimaan atau biaya total). Untuk metode pulang pokok dalam unit, langkah pertama adalah harus menyamakan penerimaan total (TR) dengan biaya total (TC), yaitu:

$$\mathbf{TR = TC}$$
$$\mathbf{PQ = FC + VQ}$$
$$\mathbf{PQ - VQ = FC}$$
$$\mathbf{Q(P - V) = FC}$$
$$\boldsymbol{Q = \frac{FC}{P-V}} \textbf{ atau } \boldsymbol{Q_E = \frac{FC}{P-V}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(15)}$$

Rumus (15) ini menunjukkan bahwa jumlah unit pulang pokok Q_E diperoleh dengan membagi biaya tetap total (FC) dengan selisih antara harga jual per unit (P) dengan biaya variabel (V). Kemudian, besarnya nilai rupiah pulang pokok dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan Q_E ke dalam salah satu persamaan, baik penerimaan total ataupun biaya total. Jadi, rumus (15) secara tidak langsung bisa memperoleh nilai pulang pokok dalam rupiah, tetapi harus terlebih dahulu mencari nilai pulang pokok dalam unit.

Untuk memperoleh nilai pulang pokok dalam rupiah secara langsung dihitung sebagai berikut:

$$\mathbf{TR = TC}$$

$$\mathbf{TR = FC + VQ}$$

$$\mathbf{TR - VQ = FC}$$

$$\mathbf{TR} - \frac{\boldsymbol{VQ}}{\boldsymbol{TR}}(\boldsymbol{TR}) = \mathbf{FC}$$

$$\mathbf{TR}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{VQ}}{\boldsymbol{TR}}\right) = \mathbf{FC}$$

$$\mathbf{TR}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{VQ}}{(\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q})}\right) = \mathbf{FC}$$

$$\mathbf{TR}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{P}}\right) = \mathbf{FC}$$

$$\mathbf{TR} = \frac{\boldsymbol{FC}}{\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{P}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(16)}$$

Pada rumus (15) dimana nilai penyebutnya adalah selisih antara harga per unit (P) dengan biaya variabel per unit (V) sering disebut sebagai *kontribusi laba* atau *margin laba*. Selisih ini pertama digunakan untuk menutupi biaya tetap, dan apabila biaya tetap telah terpenuhi, maka sisanya akan disumbangkan untuk laba. Selanjutnya, pada rumus (16) nilai penyebutnya yaitu rasio antara biaya variabel per unit (V) dengan harga per unit (P) sering disebut sebagai *rasio kontribusi*.

Contoh 4.3

Suatu perusahaan menghasilkan produknya dengan biaya variabel per unit Rp 4.000 dan harga jualnya per unit Rp 12.000. Manajemen menetapkan bahwa biaya tetap dari operasinya Rp. 2.000.000. Tentukanlah jumlah unit produk yang harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok?

Penyelesaian:

Diketahui:

V = Rp 4.000 ; P = Rp 12.000 ; dan FC = Rp 2.000.000

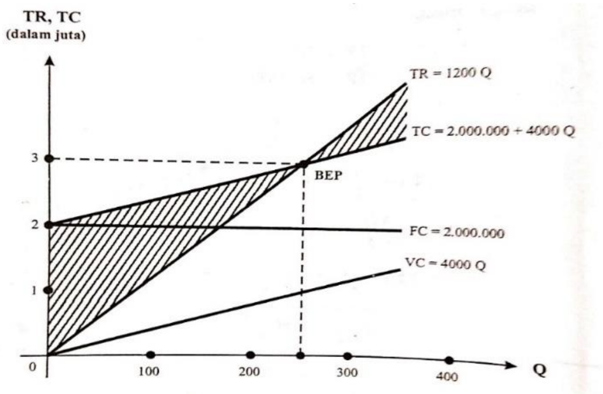
$$Q = \frac{FC}{(P - V)}$$
$$Q = \frac{2.000.000}{(12.000 - 4.000)}$$
$$Q = \frac{2.000.000}{8.000}$$
Q = 250 unit

Jadi, jumlah produk yang harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok adalah 250 unit.

$$TR = \frac{FC}{(1 - \frac{V}{P})}$$
$$TR = \frac{2.000.000}{(1 - \frac{4.000}{12.000})}$$
$$TR = \frac{2.000.000}{(1 - \frac{1}{3})}$$
$$TR = \frac{2.000.000}{(\frac{2}{3})}$$
$$TR = 2.000.000 \times \frac{3}{2}$$
$$TR = \frac{6.000.000}{2}$$
$$TR = 3.000.000$$

Jadi, total penerimaan yang harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok adalah Rp 3.000.000.

Grafik dari kurva pulang pokok ini dapat dilihat pada gambar 4.



Gambar 4.6. Pulang Pokok pada 250 Unit dan Jumlah Rp 3.000.000 (Kalangi, 2012)

Contoh 4.4

Andaikan biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan C = 20.000 + 100Q dan penerimaan totalnya R = 200Q. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi pulang pokok? Apa yang terjadi jika ia berproduksi sebanyak 300 unit?

Penyelesaian:

$\pi = R - C$

Pulang pokok: $\pi = 0$, $R - C = 0$

$$R = C$$

$$200Q = 20.000 + 100Q$$

$$200Q - 100Q = 20.000$$

$$100Q = 20.000$$

$$Q = \frac{20.000}{100}$$

$$Q = 200$$

Jadi, perusahaan ini berada dalam posisi pulang pokok pada tingkat produksi sebanyak 200 unit.

Jika, Q = 300, maka:

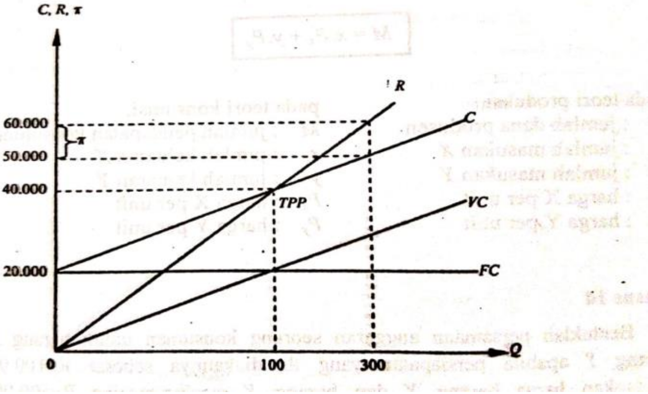
R = 200Q

R = 200(300)

R = 60.000

C = 20.000 + 100Q
C = 20.000 + 100(300)
C = 20.000 + 30.000
C = 50.000

Keuntungan: $\pi = R - C$
$\pi = 60.000 - 50.000$
$\pi = 10.000$



Gambar 4.7. Pulang Pokok pada 200 Unit dan Jumlah Rp 40.000 (Dumairy, 2012)

Posisi pulang pokok terjadi pada tingkat produksi 200 unit, R dan C sama-sama sebesar 40.000. Pada tingkat produksi 300 unit perusahaan memperoleh keuntungan sebesar 10.000.

D. Model Penentuan Pendapatan Nasional

Model penentuan pendapatan nasional yang sudah lazim dari J.M. Keynes untuk perekonomian empat sektor adalah:

Y = C + I + G + X – M .... (17)

C = a + bY .... (18)

dimana:

Y = pendapatan nasional
C = konsumsi nasional
I = investasi
G = pengeluaran pemerintah
X = ekspor
M = impor

Dari keenam variabel di atas, tedapat **dua variabel endogen,** yaitu: pendapatan, **Y** dan konsumsi, **C**, sedangkan empat variabel lainnya, yaitu: investasi, **I**, pengeluaran pemerintah, **G**, ekspor, **X**, dan impor, **M** adalah **variabel eksogen**. Variabel-variabel eksogen ini biasa ditulis dengan *subscipt* 0, yakni I_0, G_0, X_0, dan M_0.

Persamaan (17) menyatakan kondisi keseimbangan dimana pendapatan nasional sama dengan pengeluaran total. Sedangkan persamaan (18) adalah fungsi konsumsi yaitu persamaan perilaku. Kedua paramater dalam fungsi konsumsi yakni a dan b berturut-turut menunjukkan pengeluaran konsumsi otonom (*autonomous consumption*) dan kecenderungan konsumsi marginal (*marginal propensity to consume* -**MPC**).

Karena kedua persamaan (17) dan (18) mempunyai dua variabel endogen yang sama dengan jumlah persamaan, maka kita dapat mencari nilai keseimbangan pendapatan Y dan pengeluaran konsumsi C. Substitusi persamaan (18) ke dalam persamaan (17) akan menghasilkan satu persamaan dengan satu variabel endogen Y, yaitu:

$$\mathbf{Y = a + bY + I_0 + G_0 + X_0 - M_0} \text{ **atau**}$$

$$\mathbf{(1 - b)Y = a + I_0 + G_0 + X_0 - M_0}$$

Jadi, nilai pemecahan keseimbangan pendapatan nasional adalah:

$$\boldsymbol{Y = \frac{a + I_0 + G_0 + X_0 - M_0}{(1 - b)}} \text{ .... } \mathbf{(19)}$$

Untuk memperoleh nilai konsumsi C adalah dengan mensubstitusikan nilai Y yang baru ke dalam persamaan perilaku C = a + bY, sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{C = a + bY = a + \frac{b(a + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)}{(1 - b)}}$$

$$C = \frac{a(1-b) + b\,(a + \ I_0 + G_0 + X_0 - M_0)}{(1-b)}$$
$$C = \frac{a + b\,(\,I_0 + G_0 + X_0 - M_0)}{(1-b)}$$

Perhatikan bahwa nilai penyelesaian variabel Y dan C semuanya masih dinyatakan dalam parameter dan variabel eksogen. Nilai penyelesaian ini dapat diperoleh secara numerik, apabila data dari paramater dan variabel eksogen telah ditentukan secara jelas dalam model.

Contoh 4.5

Diketahui model pendapatan nasional adalah sebagai berikut:

Y = C + I + G

C = 25 + 0,75Y

I = I_0 = 50

G = G_0 = 25

a. Tentukanlah tingkat keseimbangan pendapatan nasional?
b. Gambarkanlah grafik fungsi permintaan agregate!

Penyelesaian:

a. Keseimbangan pendapatan nasional jika hanya ada satu sektor, yaitu sektor konsumsi rumah tangga, C, maka nilainya adalah:

   S = 0

   S = -25 + 0,25Y

   0 = -25 + 0,25Y

   0,25Y = 25

   Y = $\frac{25}{0,25}$

   Y = 100

   Jika I = I_0 = 50 miliar, maka

   Y = C + I

   Y = 25 + 0,75Y + 50

   Y – 0,75Y = 75

   0,25Y = 75

$$Y = \frac{75}{0,25}$$

$Y = 300$

Jika $I = I_0 = 50$ miliar, dan $G = G_0 = 25$ miliar, maka :

$Y = C + I + G$

$Y = 25 + 0,75Y + 50 + 25$

$Y = 100 + 0,75Y$

$Y – 0,75Y = 100$

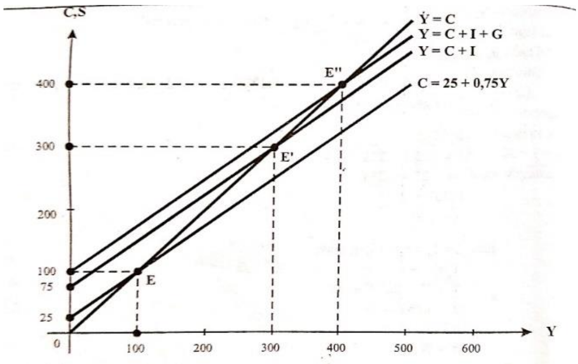
$0,25Y = 100$

$$Y = \frac{100}{0,25}$$

$Y = 400$

Jadi, keseimbangan pendapatan nasional mula-mula hanya sektor konsumsi rumah tangga (C) adalah 100 miliar. Setelah ada pengeluaran investasi (I) 50 miliar, maka keseimbangan pendapatan nasional berubah menjadi 300 miliar. Selanjutnya, jika ditambah lagi pengeluaran pemerintah (G) sebesar 25 miliar, maka keseimbangan pendapatan nasional menjadi 400 miliar.

b. Keseimbangan pendapatan nasional ini dapat dilihat pada gambar 4.8



Gambar 4.8. Keseimbangan Pendapatan Nasional Empat Sektor (Kalangi, 2012)

Contoh 4.6

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 1500 + 0{,}75Y_d$. Investasi dan pengeluaran pemerintah masing-masing sebesar 2.000 dan 1.000. Pajak yang diterima dan pembayaran alihan yang dilakukan oleh pemerintah masing-masing dicerminkan oleh $T = 500 + 0{,}25Y$ dan $R = 100 + 0{,}05Y$. Jika nilai ekspornya 1.250 dan impornya dicerminkan oleh $M = 700 + 0{,}10Y$, hitunglah pendapatan nasional negara tersebut. Hitung pula konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya. Berapa pendapatan nasional yang baru seandainya pemerintah menaikkan pengeluarannya menjadi sama seperti nilai ekspor?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} Y_d &= Y - T + R \\ &= Y - 500 - 0{,}25Y + 100 + 0{,}05Y \\ &= 0{,}80Y - 400 \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga } C = 1.500 + 0{,}75(0{,}80Y - 400)$$
$$= 1.200 + 0{,}60Y$$

$$Y = C + I + G + (X - M)$$
$$Y = 1.200 + 0{,}60Y + 2.000 + 1.000 + 1.250 - (700 + 0{,}10Y)$$
$$Y = 4.750 + 0{,}50Y$$
$$0{,}50\,Y = 4.750$$
$$Y = \frac{4.750}{0{,}50}$$
$$Y = 9.500$$

Jadi, pendapatan nasional adalah 9.500.

$$\begin{aligned} \text{Pendapatan disposabel: } Y_d &= 0{,}80Y - 400 \\ &= 0{,}80(9.500) - 400 \\ &= 7.600 - 400 \\ &= 7.200 \end{aligned}$$

$$C = 1.500 + 0{,}75Y_d$$
$$C = 1.500 + 0{,}75(7.200)$$
$$C = 1.500 + 5.400$$
$$C = 6.900$$

$S = Y_d - C$
$S = 7.200 - 6.900$
$S = 300$

$T = 500 + 0{,}25Y$
$T = 500 + 0{,}25(9.500)$
$T = 500 + 2.375$
$T = 2.875$

$R = 100 + 0{,}05Y$
$R = 100 + 0{,}05(9.500)$
$R = 100 + 475$
$R = 575$
$M = 700 + 0{,}10Y$
$M = 700 + 0{,}10(9.500)$
$M = 700 + 950$
$M = 1.650$

$a = 1 - c + ct - cr + m$
$a = 1 - 0{,}75 + 0{,}75(0{,}25) - 0{,}75(0{,}05) + 0{,}10$
$a = 1 - 0{,}75 + 0{,}1875 - 0{,}0375 + 0{,}10$
$a = 0{,}5$

$k_G = \frac{1}{a}$
$k_G = \frac{1}{0{,}5}$
$k_G = 2$
G' = X = 1.250, berarti $\Delta G = G' - G$
$= 1.250 - 1.000$
$= 250$

$\Delta Y = k_G \times \Delta G$
$= 2 \times 250$
$= 500$

Pendapatan nasional yang baru:

Y' = Y + ΔY

Y' = 9.500 + 500

Y' = 10.000

E. Fungsi Konsumsi dan Tabungan

Fungsi konsumsi pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli ekonomi yang bernama **John M. Keynes**. Keynes berasumsi bahwa fungsi konsumsi mempunyai beberapa sifat khusus yaitu:

1. Terdapat sejumlah konsumsi mutlak (absolut) tertentu untuk mempertahankan hidup walaupun tidak mempunyai pendapatan uang.
2. Konsumsi berhubungan dengan pendapatan yang dapat dibelanjakan (*disposable income*) yaitu: $C = f(Y_d)$
3. Jika pendapatan yang siap dibelanjakan meningkat, maka konsumsi juga akan meningkat walaupun dalam jumlah yang lebih sedikit. Jadi, bila ΔY_d = perubahan kenaikan pendapatan yang siap dibelanjakan dan ΔC = perubahan konsumsi, maka $\frac{\Delta C}{\Delta Y_d}$ akan bernilai positif dan kurang dari satu, atau $0 < \frac{\Delta C}{\Delta Y_d} < 1$.
4. Proporsi kenaikan pendapatan yang siap dibelanjakan untuk konsumsi adalah konstan. Proporsi ini disebut sebagai kecenderungan konsumsi marginal (*marginal propensity to consume* – **MPC**).

Berdasarkan keempat asumsi di atas, maka fungsi konsumsi dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$C = a + bY_d$ .... (20)

dimana:

C = konsumsi

Y_d = pendapatan yang dapat dibelanjakan

a = konsumsi dasar tertentu yang tidak tergantung pada pendapatan

b = kecenderungan konsumsi marginal (**MPC**)

Fungsi tabungan dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (20) ke dalam persamaan pendapatan **Y = C + S**, sehingga menghasilkan,

$\mathbf{Y = (a + bY_d) + S}$

$\mathbf{S = Y - (a + bY_d)}$ **atau**

$\mathbf{S = -a\ (1 - b)Y_d}$ **.. (21)**

dimana:

S = tabungan

a = tabungan negatif bila pendapatan sama dengan nol

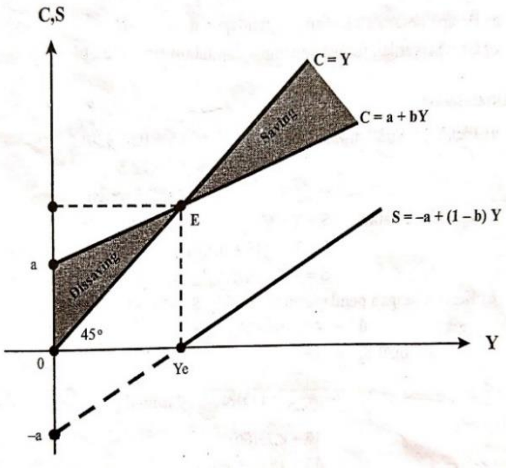
(1 – b) = kecenderungan menabung marginal (**MPS**)

Y_d = pendapatan yang dapat dibelanjakan

Apabila diperhatikan pada persamaan tabungan (21), besarnya MPS = (1 – b). Sedangkan pada persamaan konsumsi besarnya MPC = b. Hal ini berarti bahwa MPS = 1 – MPC atau

MPS + MPC = 1 .... (22)

Persamaan konsumsi (20) dan persamaan tabungan (21) di atas, dapat digambarkan secara bersama-sama dalam satu diagram, seperti dalam gambar 4.9 di bawah ini:



Gambar 4.9. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan (Kalangi, 2012)

Perhatikan gambar 4.9 bahwa ***a*** adalah konsumsi tertentu bila pendapatan = 0; C = Y adalah garis 45^0, dimana titik-titik pada garis tersebut menunjukkan bahwa pendapatan sama dengan konsumsi; titik E adalah titik keseimbangan pendapatan. Pada titik tersebut semua pendapatan habis dikonsumsi, atau tabungan sama dengan nol (**S = 0**). $0Y_E$ adalah besarnya pendapatan yang hanya cukup untuk dikonsumsi. Di sebelah kanan titik **E** pendapatan lebih besar daripada konsumsi, sehingga **tabungan menjadi positif**. Sebaliknya, di sebelah kiri titik **E** pendapatan lebih kecil daripada konsumsi, sehingga terjadi **tabungan yang negatif** (*dissaving*). Tabungan negatif ini dapat terjadi bila konsumsi dibiayai oleh pinjaman atau penjualan kekayaan (*assets*).

Contoh 4.7

Jika fungsi konsumsi ditunjukkan oleh persamaan $C = 15 + 0{,}75Y_d$, pendapatan yang dapat dibelanjakan (*disposable income*) adalah Rp 30 miliar.

a. Berapa nilai konsumsi agregate, bila pendapatan yang dapat dibelanjakan adalah Rp 30 miliar?
b. Berapa besar keseimbangan pendapatan nasional?
c. Gambarkanlah fungsi konsumsi dan tabungan secara bersama-sama!

Penyelesaian:

a. Jika Y_d = Rp 30 miliar, maka $C = 15 + 0{,}75\ (30)$

$$C = 15 + 22{,}5$$
$$C = 37{,}5$$

Maka, nilai konsumsi agregate adalah Rp 37,5 miliar.

b. $Y_d = C + S$ atau $S = Y - C$

$$S = Y_d - (15 + 0{,}75Y_d)$$
$$S = -15 + 0{,}25Y_d$$

Maka, besar keseimbangan pendapatan nasional adalah
$S = -15 + 0{,}25Y_d$

c. Keseimbangan pendapatan terjadi bila S = 0
Jadi, $0 = -15 + 0{,}25Y_d$

$0,25Y_d = 15$

$Y_d = \frac{15}{0,25}$

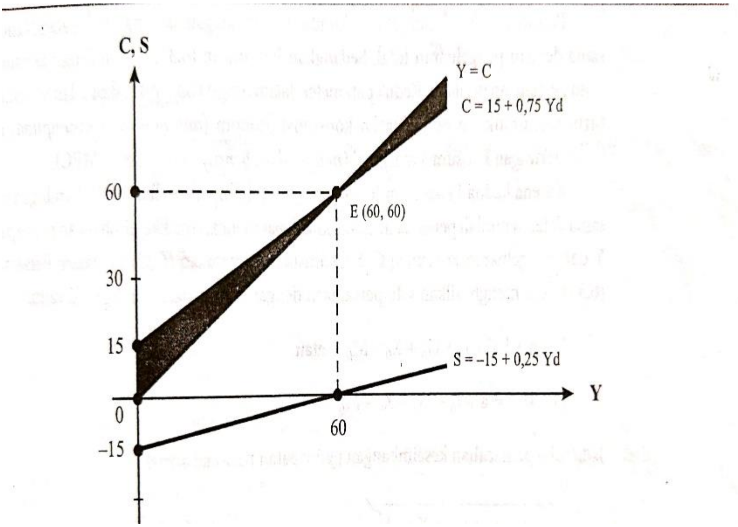
$Y_d = 60$ miliar

$C = 15 + 0,75\ (60)$

$C = 15 + 45$

$C = 60$ miliar

d. Gambar fungsi konsumsi dan fungsi tabungan



Gambar 4.10. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan dimana Keseimbangan Pendapatan Nasional di Titik E (60,60) (Kalangi, 2012)

Contoh 4.8

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan C = 30 + 0,8Y. Bagaimana fungsi tabungannya dan berapa besarnya konsumsi jika tabungan sebesar 20?

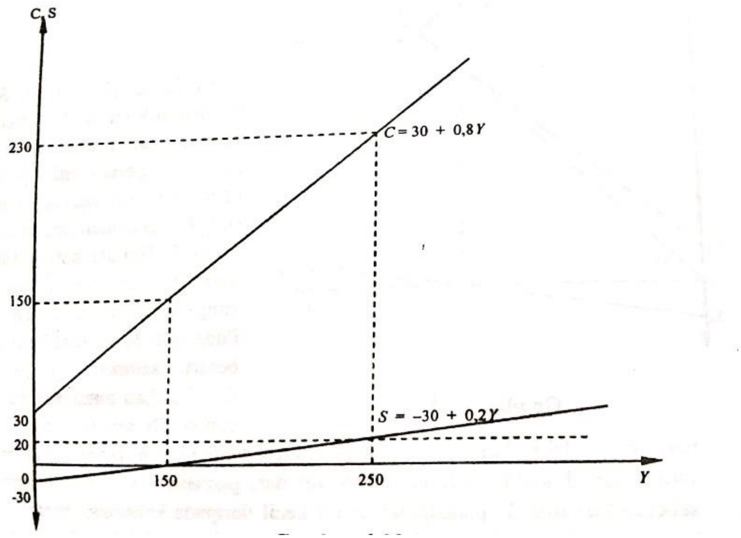
Penyelesaian:

S = Y – C

$S = Y - (30 + 0{,}8Y)$
$S = Y - 30 - 0{,}8Y$
$S = -30 + 0{,}2Y$

Jika $S = 20$
$S = -30 + 0{,}2Y$
$20 = -30 + 0{,}2Y$
$50 = 0{,}2Y$
$Y = \frac{50}{0{,}2}$
$Y = 250$

Maka, $C = Y - S$
$C = 250 - 20$
$C = 230$



Gambar 4.11. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan (Dumairy, 2012)

BAB V
FUNGSI NONLINIER DALAM EKONOMI

A. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan adalah suatu persamaan yang menunjukkan hubungan antara kuantitas produk yang diminta dengan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Perilaku konsumen dan harga, dapat dianalisa dengan kajian matematis menggunakan fungsi permintaan. Fungsi permintaan ini menggunakan sudut pandang pembeli/konsumen.

Hukum permintaan adalah apabila harga produk naik maka jumlah produk yang dimintaakan turun dan sebaliknya. Jadi hubungan antara harga dengan kuantitas produk yang diminta merupakan hubungan berlawanan arah/terbalik, sehingga gradient/kemiringan dari fungsi permintaan (b) akan selalu negatif.

Menurut Hedwigis Esti Riwayati dan Markonah dalam buku Matematika Ekonomi Bisnis (2008), fungsi permintaan atau demand adalah hubungan antara harga komoditas dengan jumlah yang diminta atau dibeli dengan asumsi variabel lainnya konstan (*ceteris paribus*).

Dalam buku Ekonomi Manajerial: Pembuatan Keputusan Bisnis (2011) karya Vincent Gaspersz, hukum permintaan berbunyi jika kuantitas produk yang diminta konsumen berhubungan terbalik atau negatif dengan harga produk. Hal ini terjadi dengan asumsi seluruh variabel permintaan dianggap konstan.

Lebih mudahnya, hukum permintaan (demand) menyatakan jika harga barang rendah, maka jumlah barang yang diminta naik. Sebaliknya, jika harga barang tinggi, maka jumlah barang permintaan lebih sedikit. Bentuk fungsi permintaannya adalah:

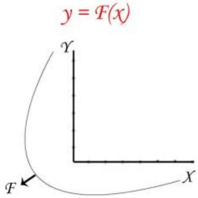
$$\mathbf{P=a-bQ}$$
$$\mathbf{Q= a-bP}$$

Keterangan:
P = harga barang
Q = jumlah permintaan barang
a = konstanta
b = kemiringan atau gradient

Fungsi permintaan dalam ilmu ekonomi adalah sebuah fungsi yang menunjukkan hubungan antara harga barang dengan jumlah barang yang diminta oleh masyarakat.[1] "Fungsi Permintaan" berasal dari dua kata, yaitu fungsi dan permintaan. "Fungsi" adalah ketergantungan suatu variabel dengan variabel lainnya. Fungsi secara umum ditulis $\boldsymbol{y} = \mathbf{F}(\boldsymbol{x})$.

Secara grafik, digambarkan dengan $\boldsymbol{y}$ = sumbu vertikal, $\boldsymbol{x} = sumbu$ horizontal dan $\boldsymbol{F}$ menyatakan ketergantungan *y* terhadap **x**. Sedangkan "permintaan" adalah banyaknya barang dan jasa yang dibutuhkan masyarakat.

Dalam ilmu ekonomi, fungsi permintaan ditulis sebagai **p**=**F** (**q**). Dimana **p**, garis vertikal, adalah Price (harga barang), dan q, garis horizontal, adalah *Quantity of Goods* (Banyaknya barang), dan ***F*** menyatakan ketergantungan antara harga dengan jumlah barang.



Fungsi permintaan memiliki beberapa sifat khusus, di antaranya:

1. Fungsi permintaan bersifat negatif. Artinya, jika nilai p bertambah, maka nilai q akan berkurang, begitu juga sebaliknya. Hingga suatu saat nilai p akan menyentuh titik tertinggi (harga maksimal), titik q akan menyentuh titik terendah (barang tidak ada), sebaliknya, q akan menjadi barang bebas jika titik p mencapai titik terendahnya (harga 0 atau gratis).
2. Titik titik pada fungsi permintaan tidak dapat memiliki nilai negatif dan tidak mungkin bernilai tak terhingga (~), ini berarti fungsi permintaan selalu terletak di kuadran I.
3. Fungsi permintaan bisa berbentuk linier atau kurva
4. Fungsi permintaan memiliki fungsi satu-satu, artinya, satu titik p hanya untuk satu titik q, begitu juga sebaliknya. Misalnya, pada tingkat harga (*p*) Rp. 500,00, jumlah barang (*q*) yang diminta

adalah 5 buah; pada tingkat harga Rp. 100,00 jumlah barang yang diminta naik menjadi 10 buah.

$$.\, Q_d = a\text{-b}.\, P_d$$

Keterangan:
a dan b: nilai konstanta
Q_d: jumlah barang yang diminta
P_d: harga barang yang diminta

$$\frac{P - P_1}{P_1 - P_2} = \frac{Q - Q_1}{Q_1 - Q_2}$$
.

Keterangan:
Q_1: jumlah barang awal
Q_2: jumlah barang akhir
P_1: harga barang awal
P_2: harga barang akhir

B. Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran yaitu fungsi yang menunjukkan hubungan harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan. Dalam fungsi penawaran menggunakan sudut pandang Penjual. Fungsi penawaran oleh produsen digunakan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan kuantitas barang yang akan diproduksi. Sesuai hukum penawaran jika harga produk naik, dengan asumsi faktor-faktor lain dianggap konstan, maka jumlah produk yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya jika harga produk turun, jumlah produk yang ditawarkan juga turun.

Dalam fungsi penawaran terdapat hubungan positif antara harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan, maka gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif.

Fungsi penawaran atau supply merupakan hubungan antara harga komoditas dengan jumlah yang ditawarkan. Di mana hubungan antara harga dengan penawaran selalu berbanding lurus.

Penawaran ini terjadi di tiap tingkat harga, sesuai dengan periode waktu tertentunya (*ceteris paribus*). Hukum penawaran berbunyi jika kuantitas atau jumah produk yang ditawarkan memiliki hubungan positif atau searah dengan harga produknya. Hal ini terjadi dengan asumsi seluruh variabel penawaran dianggap konstan.

Lebih mudahnya, hukum penawaran (*supply*) menyatakan jika harga barangnya naik, maka jumlah barang yang ditawarkan juga akan bertambah. Sebaliknya, jika jika harga barangnya turun, maka jumlah barang yang ditawarkan juga ikut berkurang. Bentuk fungsi penawarannya adalah:

$$\mathbf{P=a+bQ}$$
$$\mathbf{Q= a+bP}$$

Keterangan:
P = harga barang
Q = jumlah permintaan barang
a = konstanta
b = kemiringan atau gradient

Fungsi penawaran adalah suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara harga barang atau jasa yang ada di pasar dengan kuantitas penawaran yang ditawarkan oleh seorang produsen, fungsi ini berbentuk persaman matematika yang didapatkan dari 2 atau lebih data yang memperlihatkan banyak barang yang ditawarkan dengan harga barang tersebut pada suatu waktu. Fungsi penawaran digunakan oleh produsen dengan tujuan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan banyaknya barang yang akan diproduksi dan menyusun strategi pemasaran.

Fungsi penawaran mengikuti hukum penawaran. Bila harga barang naik, dengan asumsi cateris paribus (faktor-faktor lain dianggap tetap), maka jumlah barang yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya apabila harga barang menurun jumlah barang yang ditawarkan juga menurun. Jadi, dalam fungsi penawaran antara harga barang dan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen memiliki hubungan positif, karenanya gradien dari fungsi penawaran selalu positif (Sigma, 2016:11-14).

$$. Q_s = a\text{-b}. P_s$$

Keterangan:
a dan b: nilai konstanta
Q_s: jumlah barang yang ditawar
P_s: harga barang yang ditawar

$$\frac{P - P_1}{P_1 - P_2} = \frac{Q - Q_1}{Q_1 - Q_2}$$

.

Keterangan:
Q_1: jumlah barang awal
Q_2: jumlah barang akhir
P_1: harga barang awal
P_2: harga barang akhir

C. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar terjadi jika Qd = Qs atau Pd = Ps. Keseimbangan harga terjadi jika harga yang ditawarkan produsen sama dengan harga yang diminta konsumen di pasar. Keseimbangan kuantitas terjadi jika jumlah produk yang ditawarkan produsen sama dengan jumlah produk yang diminta oleh konsumen.

Cara Menghitung Keseimbangan Pasar ada 3 cara untuk memperoleh keseimbangan yaitu:

a. Dengan menyusun tabel

Hal pertama yang dibutuhkan untuk menghitung keseimbangan dengan menggunakan tabel yaitu menyusun dahulu tabelnya. Tabel tersebut berisikan harga (P), jumlah yang diminta (Qd), dan jumlah yang ditawarkan (Qs).

Tabel 1.1 Penyusunan Tabel

P (harga) Dalam Rupiah	**Qd (jumlah yang diminta)**	**Qs (jumlah yang**

	dalam unit	ditawarkan) dalam unit
500	70	30
1500	65	40
2000	50	50
3000	55	55
4000	40	60

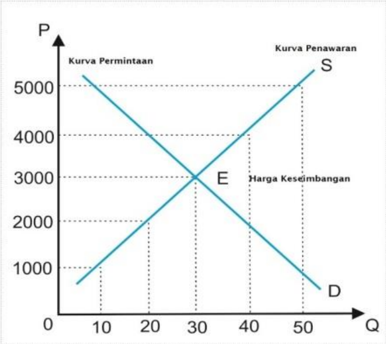
Tabel di atas, diketahui harga yang sama antara jumlah produk yang diminta (Qd) dengan jumlah produk yang ditawarkan (Qs) yaitu pada harga Rp.3.000, jumlah produk yang diminta sama dengan jumlah produk yang di tawarkan. Sehingga harga keseimbangan terjadi pada saat harga produk sebesar Rp.3.000. serta terjadi ketika produk 55 unit.

b. Dengan grafik/kurva, Ada kalanya kita akan menjumpai tabel yang tidak memperlihatkan secara langsung akan adanya harga serta jumlah keseimbangan. Sebagai contoh perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 1.2 Penyusunan Grafik

P (harga) Dalam Rupiah	**Qd (jumlah yang diminta) dalam unit**	**Qs (jumlah yang ditawarkan) dalam unit**
200	75	30
250	70	40
300	65	50
450	50	80
500	45	90

Berdasarkan tabel di atas, dapat disusun pasangan titik-titik tersebut ke dalam diagram cartesius. Maka grafik fungsi permintaan dan penawarannya dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 1.3. Grafik permintaan dan penawaran

Jika diperhatikan grafik tersebut, terlihat adanya perpotongan garis fungsi permintaan dengan garis fungsi penawaran yang menunjukkan titik keseimbangan (E). Titik keseimbangan tersebut berada pada koordinat (60,350), itulah yang disebut keseimbangan pasar. Di mana harga keseimbangan yang terjadi sebesar Rp.350, serta jumlah keseimbangan yaitu 60 unit. Grafik diatas, titik koordinat akan terlihat jelas apabila grafik yang digambar menggunakan skala yang tepat.

c. Dengan pendekatan matematis

Cara yang ketiga yaitu dengan pendekatan matematis. Di mana cara ini digunakan jika data yang dapat berbentuk fungsi permintaan dan penawaran yang setipe. Syarat keseimbangan pasar adalah:

$$\boxed{\mathbf{Qd = Qs\ atauPd = Ps}}$$

Dimana:
Qd = Jumlah produk yang diminta
Qs = Jumlah produk yang ditawarkan
Pd = harga yang diminta
Ps = harga yang ditawarkan

D. Pengertian Pajak

1. Definisi Pajak

Sebagaimana dikutip dari laman resmi Direktorat Jenderal Pajak (DJP) Kementerian Keuangan, yakni kontribusi wajib kepada negara yang terutang oleh orang pribadi atau badan yang bersifat memaksa berdasarkan Undang-Undang. Pengertian pajak sendiri sederhananya yaitu pungutan wajib dari rakyat untuk negara.

Fungsi pajak adalah membiayai pengeluaran-pengeluaran. Manfaat pajak digunakan untuk melakukan pembangunan hingga membayar gaji pegawai negeri. Pembayar pajak tidak mendapatkan imbalan secara langsung, di mana uang yang dikumpulkan dari pajak adalah digunakan untuk keperluan negara bagi sebesar-besarnya kemakmuran rakyat.

Pembayaran pajak adalah perwujudan dari kewajiban kenegaraan dan peran serta wajib pajak untuk secara langsung dan bersama-sama melaksanakan kewajiban perpajakan untuk pembiayaan negara dan pembangunan nasional.

Sesuai falsafah undang-undang definisi pajak, membayar pajak adalah bukan hanya merupakan kewajiban, tetapi merupakan hak dari setiap warga negara untuk ikut berpartisipasi dalam bentuk peran serta terhadap pembiayaan negara dan pembangunan nasional.

Tanggung jawab atas kewajiban pembayaran manfaat pajak, sebagai pencerminan kewajiban kenegaran di bidang perpajakan berada pada anggota masyarakat sendiri untuk memenuhi kewajiban tersebut.

Hal tersebut sesuai dengan sistem *self assessment* yang dianut dalam sistem perpajakan Indonesia. Pemerintah dalam hal ini Direktorat Jenderal Pajak, sesuai dengan fungsinya berkewajiban melakukan pembinaan atau penyuluhan, pelayanan, dan pengawasan. Berikut karakteristik pajak:

a. Pajak adalah kontribusi wajib pajak pada negara
b. Tidak ada imbalan langsung
c. Bersifat memaksa
d. Diatur dalam undang-undang

2. Fungsi Pajak

a. Fungsi anggaran

Pajak adalah sumber pendapatan paling besar di banyak negara. Manfaat pajak untuk membiayai semua pengeluaran negara seperti gaji pegawai negeri, gaji tentara, pembayaran utang pemerintah, dan membiayai pembangunan.

b. Fungsi regulasi

Pajak juga digunakan pemerintah sebagai pengaturan kebijakan negara atau yang biasa disebut kebijakan fiskal. Beberapa kebijakan fiskal antara lain penggunaan pajak bea masuk untuk menekan impor.

c. Fungsi stabilitas

Dengan adanya pajak, pemerintah memiliki dana untuk menjalankan kebijakan yang berhubungan dengan stabilitas harga. Sehingga inflasi dapat dikendalikan. Caranya bisa dengan mengatur peredaran uang di masyarakat, pemungutan pajak, penggunaan pajak yang efektif dan efisien.

d. Fungsi pemerataan

Pajak adalah digunakan untuk menyesuaikan dan menyeimbangkan antara pembagian pendapatan dengan kebahagiaan dan kesejahteraan masyarakat, termasuk pembagian antar pemerintah daerah.

3. Jenis pajak

a. Pajak berdasarkan sifatnya
   1) Pajak tidak langsung adalah pajak yang diberikan kepada wajib pajak bila melakukan peristiwa atau perbuatan tertentu. Contohnya seorang baru akan dikenakan pajak PPN apabila membeli suatu barang.
   2) Pajak langsung adalah pajak yang dikenakan pada wajib pajak secara berkala baik perorangan maupun badan usaha, contohnya pajak penghasilan (PPh) dan pajak bumi dan bangunan (PBB).

b. Pajak berdasarkan pemungutnya
   1) Pajak negara adalah pajak yang dipungut oleh negara atau pemerintah pusat seperti PPN, PPh, dan PPnBM.

2) Pajak daerah adalah pajak yang pemungutannya dilakukan oleh pemerintah daerah seperti PBB, pajak kendaraan bermotor, pajak restoran, dan BPHTB. Pajak adalah sumber penerimaan utama daerah selain transfer dari pemerintah pusat.

BAB VI
APLIKASI FUNGSI NONLINIER DALAM EKONOMI

Fungsi adalah hubungan matematis antara satu variabel denagan variabel lainnya. Fungsi Non linier merupakan salah satu model yang penting dalam penerapan ekonomi, karena sebagian dari model ekonomi linier yang ada, sesungguhnya merupakan linierisasi dari model non linier.

Salah satu fungsi yang sering digunakan adalah fungsi kuadrat.

Bentuk fungsi non linier:

1. Lingkaran
2. Elips
3. Hiperbola
4. Parabola

Persamaan kuadrat:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. Jika $B = 0$ dan $A = C \neq 0$ (Lingkaran)
2. Jika $B^2 - 4AC < 0$ (Elips)
3. Jika $B^2 - 4AC > 0$ (Hiperbola)
4. Jika $B^2 - 4AC = 0$ (Parabola)

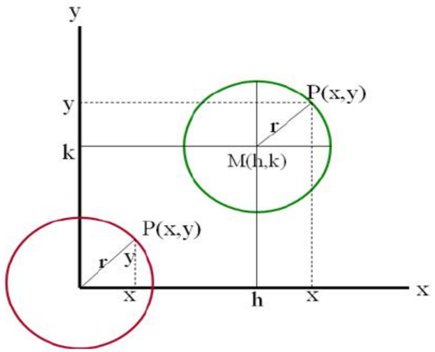
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. Jika $A = C \neq 0$ (Lingkaran)
2. Jika $A \neq C$, tanda sama (Elips)
3. Jika A dan C berlawanan tanda (Hiperbola)
4. Jika $A = 0$ atau $C = 0$, tapi tidak keduanya (Parabola)

1. Lingkaran

   Lingkaran merupakan tempat kedudukan atau lokus titik-titik P(x,y) yang jaraknya r sampai suatu titik M yang dinamakan pusat lingkaran adalah sama. Persamaan lingkaran menjadi sederhana bila pusat lingkaran berimpit dengan asal 0. Berlaku hukum Pythagoras

$x^{2} + y^2 = r^2$



Bila pusat lingkaran dipindahkan dari 0 ke M(h,k) , dengan hukum pythagoras diperoleh persamaan lingkaran :

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$x \rightarrow (x - h), y \rightarrow (y - k)$$

Maka Dapat ditulis

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 + r^2) = 0$

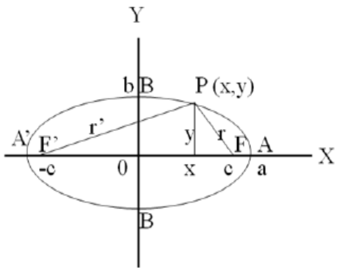
h dan k bisa positif / negatif → persamaan lingkaran:

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow A = C$ dan $B = 0$

2. Elips

Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua fokus selalu konstan. Elips mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegak lurus. Sumbu yang panjang disebut Sumbu Mayor. Dan yang pendek disebut Sumbu Minor. Titik potong antara kedua sumbu elips tersebut merupakan pusat elips ybs. Persamaan elips menjadi sederhana bila dipilih asal 0 di pertengahan FF' dan sumbu y tegak lurus FF'.

Misal: 0F = 0F' = c, PF + PF' = 2a dan a2 – c2 = b2



$0F = 0F' = c, PF + PF' = 2a$

$dan\ a^2 - c^2 = b^2$

$PF' + PF = 2a$

$PF' = 2a - PF$

$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$

dikuadratkan dan dikurangi $c^2 + x^2 + y^2$ dikiri dan dikanan

$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - 2cx$

$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$

dikuadratkan : $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$

$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

dibagi dengan $a^2 - c^2 = b^2$ --> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

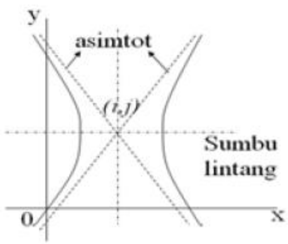
Adapun AA' adalah sumbu mayor dan BB' adalah sumbu minor elips. Bila elips dipindahkan sejajar sehingga pusatnya tidak lagi di 0. → titik M (h,k)

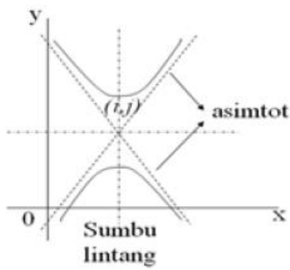
Bentuk umum persamaan elips:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

3. Hiperbola

Hiperbola ialah tempat kedudukan titik-titik yang perbedaan jaraknya terhadap dua fokus selalu konstan. Sebuah hiperbola mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegak lurus dan sepasang asimtot.





Bentuk umum persamaan hiperbola:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

4. Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direkstris. Persamaan parabola menjadi sederhana bila dipilih asal 0 di M dan FT = sumbu y.

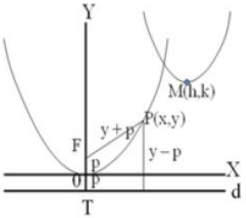
Dengan hukum pythagoras:

$$x^2 + (y - x)^2 = (y + x)^2$$

$$x^2 - 2yp = 2yp$$

$$x^2 = 4py$$

$$y = 1/4px^2 = ax^2$$



Bila parabola dipindahan sejajar sehingga puncaknya tidak lagi 0 tetapi di M(h,k) maka:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$x^2 - 2hx - 4py + (h^2 + 4pk) = 0$

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

$Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$

Titik Ekstrim

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

A. Fungsi Penerimaan Kuadrat

Fungsi adalah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain. Sebuah fungsi dibentuk oleh beberapa unsur. Unsur-unsur pembentuk fungsi adalah variabel, koefisien,dan konstanta. Penerimaan total adalah hasil kali antara harga perunit produk dengan jumlah produk yang dijual. Bentuk fungsi penerimaan total (total revenue, R) yang non-linear pada umumnya berupa sebuah persamaan parabola terbuka ke bawah. Ini merupakan bentuk fungsi penerimaan yang lazim dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar monopoli. Sedangkan fungsi penerimaan total yang linear merupakan fungsi penerimaan yang dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar persaingan sempurna. Penerimaan total merupakan fungsi darijumlah barang atau merupakan hasil kali jumlah barang dengan harga barang per unit. Seperti halnya dalam konsep biaya, dalam konsep penerimaanpun dikenal pengertian rata-rata dan marjinal. Penerimaan rata-rata (average revenue, AR) ialah penerimaan yang diperoleh per unit barang, merupakan hasilbagi penerimaan total terhadap jumlah barang. Penerimaan marjinal (marginal revenue, MR) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

Penerimaan total: $R = Q \times P = f\ (Q)$

Penerimaan rata-rata: $AR\ = \frac{R}{Q}$

Penerimaan marjinal: $MR\ = \frac{\Delta R}{\Delta Q}$

Contoh:

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopoli ditunjukkan oleh $P = 900 - 1{,}5Q.$ jika terjual barang sebanyak 200 unit, bagaimana persamaan penerimaan total dan jumlah besarnya penerimaan total serta jumlah harga jual perunit? kemudian Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan maksimum tersebut.

Penyelesaian:

Dik:

$P\ =\ 900 - 1{,}5Q$

$Q_1 = 200,$

$Q_2 = 250$

$R = Q \times P = 900Q - 1{,}5Q^2$

$R = 900(200\ ) - 1{,}5(200\ )^2$

$\quad = 120.000$

Maka, $P = 900 - 1{,}5Q$

$$P = 900 - 1{,}5(200)$$
$$= 600$$

$$atau\ P = \frac{R}{Q}$$
$$= \frac{120.000}{200}$$
$$= 600$$

$$Jika\ Q = 250, R = 900(250) - 1{,}5(250)^2 = 131.250$$
$$MR = \frac{\text{Ä}R}{\Delta Q}$$
$$= \frac{131.250 - 120.000}{250 - 200}$$
$$= 225$$
$$R = -1{,}5Q^2 + 900Q$$

$$R\ maksimum\ pada\ Q = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{900}{3}$$
$$= 300$$

Besarnya R maksimum . $1{,}5(300)^2 + 900(300) = 135.000$

Dalam membentuk fungsi peneriman melalui fungsi permintaan, persamaan permintaannya harus dalam bentuk *P=f (Q)* . Jika persamaan permintaan berbentuk *Q=f (P)* maka harus dibalik dulu menjadi bentuk *P=f (Q)*, mengingat penerimaan merupakan fungsi dari jumlah barang dan bukan fungsi dari harga

B. Fungsi Penawaran Kuadrat

Fungsi penawaran adalah suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara harga barang atau jasa yang ada di pasar dengan kuantitas penawaran yang ditawarkan oleh seorang produsen atau penjual. Fungsi penawaran digunakan oleh produsen dengan tujuan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan banyaknya barang yang akan diproduksi. Berdasarkan hukum penawaran bahwa jika harga produk naik, dengan asumsi faktor-faktor lain dianggap konstan, maka jumlah produk yang ditawarkan juga akan naik, dan sebaliknya jika harga produk turun, jumlah produk yang ditawarkan juga ikut turun.

Dalam fungsi penawaran terdapat hubungan positif antara harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan, maka gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif.

Faktor lain yang mempengaruhi permintaan selain harga itu sendiri adalah:

1. Biaya Produksi
   Kemampuan produksi akan mempengaruhi tinggi rendahnya biaya produksi dan harga jual, sehingga berpengaruh terhadap jumlah penawaran.
2. Teknologi
   Teknologi yang digunakan yang semakin mutakhir maka produksi semakin efisien sehingga jumlah yang ditawarkan dapat ditingkatkan.
3. Harapan akan harga masa yang akan datang
   Jika produsen memperkirakan harga akan naik di masa depan, maka penawaran saat iniakan dikurangi dan barang/jasad ditimbun untuk dijual di masa yang akan datang dengan harapan keuntungan yang diperoleh meningkat.
   Bentuk umum dari fungsi penawaran adalah kebalikan dari fungsi permintaan, yaitu sebagai berikut:

$$Qs = -a + bPs$$

Dimana:

$a\ dan\ b$
$= \ konstanta, dimana\ b\ harus\ bernilai\ positif$
$b = ÄQs/ ÄPs$

$$Ps = harga\ produk\ yang\ ditawarkan\ per\ unit$$
$$Qs = jumlah/kuantitas\ produk\ yang\ ditawarkan$$
$$Ps \geq 0, Qs \geq 0$$

Contoh:

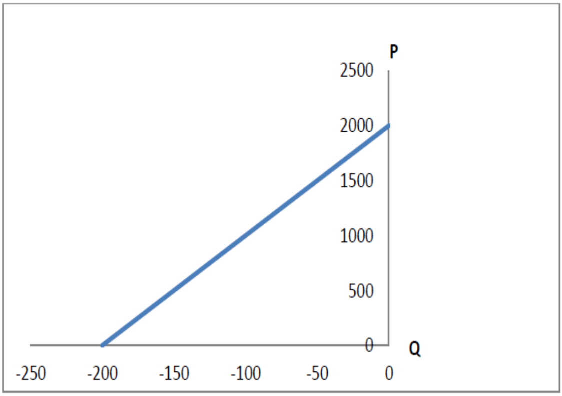
Toko Rahmat hanya mampu menjual melon sebanyak 100 buah saat harga melon Rp.3.000 per buah, dan toko Rahmat mampu menjual lebih banyak menjadi 200 saat harga melon Rp. 4.000 per buah. Bentuklah fungsi penawarannya!

Penyelesaian:
Masukkan data yang diketahui ke dalam rumus persamaan linear:

$$P - P1P2 - P1 = Q - Q1Q2 - Q1$$
$$P - 30004000 - 3000 = Q - 100200 - 100$$
$$P - 30001000 = Q - 100100$$
$$(P - 3.000)(100) = (Q - 100)(1.000)$$
$$100P - 300.000 = 1.000Q - 100.000$$
$$-1.000Q = 300.000 - 100.000 - 100P$$
$$-1.000Q = 200.000 - 100P\ (: -1000)$$
$$Q = -200 + 0.1P$$
$$-0{,}1P = -200 - Q$$
$$P = 2.000 + 10Q$$

Jadi diperoleh fungsi penawarannya:
$Qs = -200 + 0{,}1P$ atau
$P = 2.000 + 10Q$

Adapun grafik sebagai berikut:

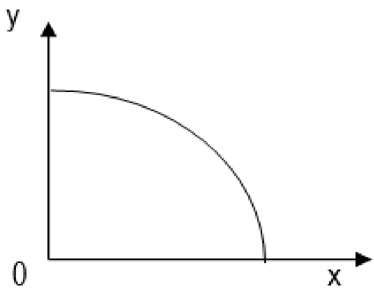


Gambar 1. Grafik Fungsi Penawaran

C. Kurva Transformasi Produksi

Kurva transformasi adalah titik-titik kombinasi antara jumlah dua jenis produk yang dapat dihasilkan dengan menggunakan faktor produksi (input) tertentu.

1. Kurva transformasi produk menunjukkan bagaimana suatu perusahaan berdasarkan proses produksinya menetapkan kombinasi jumlah setiap jenis barang yang dihasilkannya, sesuai dengan sumber daya (kapital, tenaga kerja, bahan baku, energi, manajemen, teknologi, dan sebagainya) yang dimilikinya.
2. Jika suatu perusahaan memproduksi dua jenis barang, misalnya x dan y, dengan menggunakan bahan baku dan tenaga kerja tertentu, maka hubungan kuantitas atau kombinasi kuantitas kedua jenis barang tersebut akan membentuk kurva transformasi produk atau disebut juga sebagai kurva kemungkinan produksi (*production possibility curve*).
3. Hubungan x dan y atau kombinasi x dan y yang diproduksi digambarkan sebagai curve cembung (*concave curve*), yaitu curve yang terbuka ke bawah mengarah ke titik origin (titik 0).



Berdasarkan kurva tersebut tampak bahwa jika jumlah produksi x ditambah, maka jumlah produksi y akan berkurang, demikian sebaliknya.

Contoh :
Suatu perusahaan melamine memproduksi dua jenis barang yaitu piring (P) dan gelas (G), jika diketahui kurva transformasi produk untuk perusahaan tersebut: $P^2 + 3P + 5G = 130$. Tentukanlah:

1. Jumlah maksimum piring yang dapat diproduksi
2. Jumlah maksimum gelas yang dapat diproduksi
3. Jumlah maksimum piring yang diproduksi, jika diproduksi 18 gelas
4. Jumlah maksimum gelas yang diproduksi, jika diproduksi 7 piring
5. Gambarkan kurva transformasi produk tersebut

Jawab :

1. Perusahaan tersebut akan memproduksi piring dalam jumlah maksimum bila G = 0 (gelas tidak diproduksi, sehingga $P^2 + 3P + 5(0) = 130 \rightarrow P^2 + 3P - 130 = 0$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-130)}}{2(1)}$$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2} \rightarrow P_{1,2} = \frac{-3 \pm 23}{2} \rightarrow P_1 = 10 \; dan \; P_2 = -13$$

Jadi jumlah maksimum piring yang diproduksi sebanyak 10 unit

2. Produksi gelas maksimum akan tercapai bila P = 0 (piring tidak diproduksi), sehingga:
   $P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow 0 + 0 + 5G = 130 \rightarrow G = 26$
   Jadi jumlah maksimum gelas yang diproduksi sebanyak 26 unit

3. Bila diproduksi gelas G = 18, maka:
   $P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow P^2 + 3P + 5(18) = 130 \rightarrow P^2 + 3P - 40 = 0$

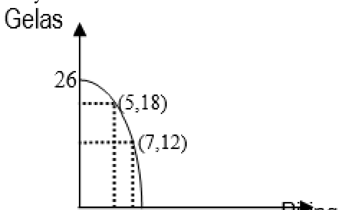
$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} \rightarrow P_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{2} \rightarrow P_1 = 5 \; dan \; P_2 = -8$$

   Jadi jumlah maksimum piring yang diproduksi bila G = 18 adalah 5 unit

4. Bila diproduksi P =7, maka:
   $P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow 7^2 + 3(7) + 5G = 130 \rightarrow 5G = 60 \rightarrow G = 12$
   Jadi jumlah maksimum gelas yang diproduksi bila P = 7 adalah 12 unit

5. Gambar kurvanya:



D. Kurva Indiferensi

Kurva Indiferensi (*indifference curve)* adalah kurva yang menghubungkan titik-titik kombinasi dari konsumsi (atau pembelian) barang-barang yang menghasilkan tingkat kepuasan yang *sama.*

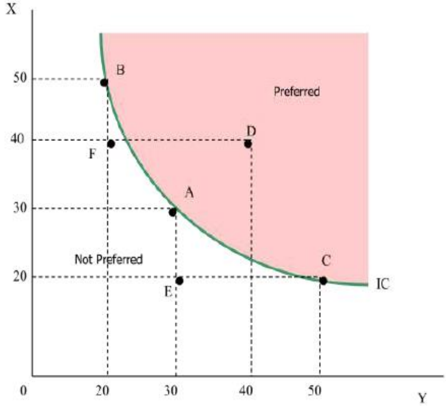
Ciri-ciri kurva indiferensi:

1. Mempunyai kemiringan yang negatif (konsumen akan mengurangi konsumsi barang yg satu apabila ia menambah jumlah barang lain yang di konsumsi).
2. Cembung ke arah titik origin, menunjukkan adanya perbedaan proporsi jumlah yang harus ia korbankan untuk mengubah kombinasi jumlah masing-masing barang yang dikonsumsi (*marginal rate of substitution*).
3. Tidak saling berpotongan, tidak mungkin diperoleh kepuasan yang sama pada suatu kurva indiferens yang berbeda.

Dalam pembentukan kurva indiferensi beberapa asumsi harus dipatuhi, yaitu:

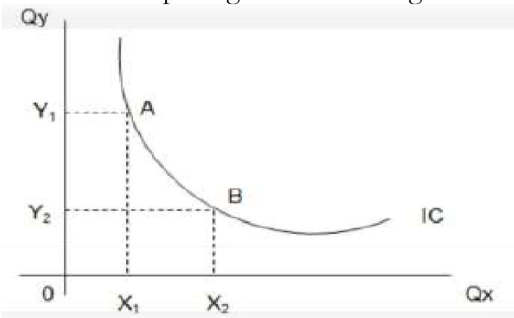
1. *Rationality,* konsumen diasumsikan rasional artinya konsumen memaksimalkan utilitas dengan pendapatan pada harha pasar tertentu dan konsumen dianggap mempunyai pengetahuan sempurna mengenai informasi pasar
2. *Utility* adalah bersifat ordinal artinya konsumen cukup memberikan rangking atau peringkat kombinasi mana saja yang ia sukai dengan demikian konsumen tidak perlu memberikan satuan kepuasan terhadap barang yang dikonsumsi
3. Menganut hukum *diminishing marginal rate of subtitution* artinya bila konsumen menaikan konsumsi barang yang satu akan menyebabkan penurunan konsumsi barang yang lain dan dapat digambarkan dengan kurva indeferen
4. *Total Utility* yang diperoleh konsumen tergantung dari jumlah barang yang dikonsumsikan
5. Bersifat konsisten dan *transivity of choice* artinya bila $A > B > C$ maka barang A lebih disukai dari B dan barang B lebih disukai dari C kesimpulannya bahwa $A > B > C$ maka $A > C$

Adapun kurva indifferensi sebagai berikut:



Gambar 2. Kurva Indifferensi

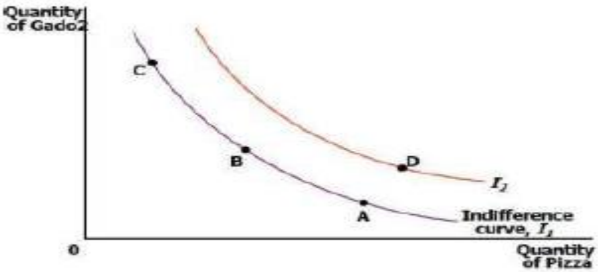
Atau secara sederhana adapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. Kurva Indiferensi

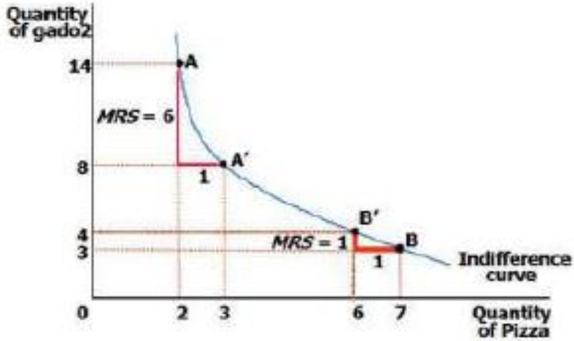
Sifat – Sifat Kurva Indiferensi

1. Kurva indeferen yang lebih tinggi lebih disukai daripada yang lebih rendah
   a. Setiap konsumen biasanya lebih suka jika dapat mengkonsumsi barang dalam jumlah lebih banyak
   b. Kurva indeferen yang lebih tinggi melambangkan ketersediaan barang lebih banyak daripada kurva di bawahnya



Gambar 4. Kurva indeferen yang lebih tinggi lebih disukai daripada yang lebih rendah

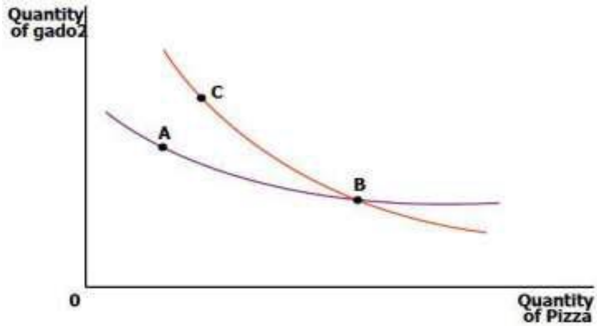
2. Kurva indeferen melengkung ke bawah
   a. Konsumen bersedia menukarkan suatu barang jika ia memperoleh lebih banyak barang lain untuk mendapatkan kepuasan yang sama
   b. Jika jumlah suatu barang berkurang maka jumlah barang lain harus meningkat.



Gambar 5. Kurva indeferen melengkung ke bawah

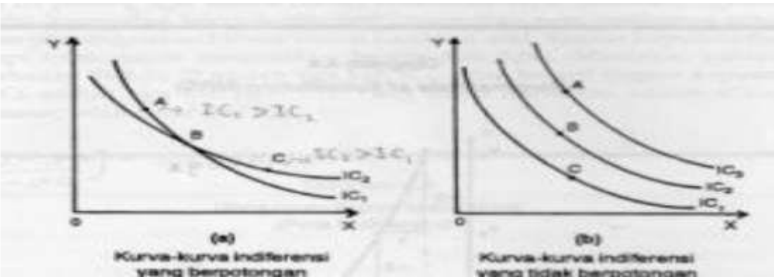
3. Kurva indeferen tidak saling berpotongan (prinsip transivitas)
   a. Titik A dan B memberikan kepuasan yang sama bagi konsumen
   b. Titik B dan C memberikan kepuasan yang sama bagi konsumen

c. Hal ini berarti titik A dan C akan memberikan kepuasan yang sama bagi konsumen
d. Padahal titik C mengandung lebih banyak barang daripada titik A.



Gambar 6. Kurva indeferen tidak saling berpotongan (prinsip transivitas)

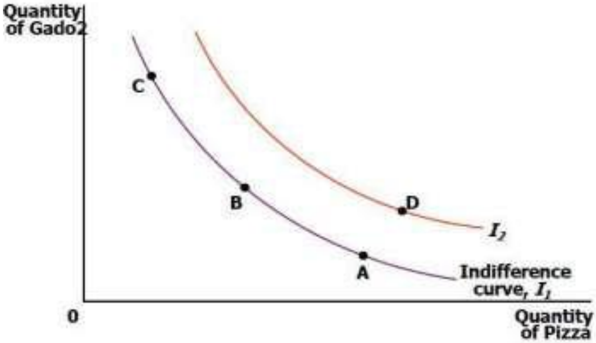
Gambar di atas tidak mungkin terjadi karena melanggar asumsi *transivity*. Berikut grafik gambar 7 yang memenuhi asumsi trasitivitas (*transivity).*



Gambar 7. Posisi kurva indeferens dikaitkan konsistensi preferensi (Transitivitas)

Prinsip *transitivity* adalah jika dikatakan kombinasi A lebih disukai dari B dan B lebih disukai dari C, maka A mestilah lebih disukai dari C. Dengan dalil ini maka kurva indifferen tidak ada yang berpotongan. Untuk gambar 7.a terlihat kurva IC1 dan IC2 berpotongan di titik B, berarti IC1 -= IC2 sehingga melanggar konsistensi preferensi (transitivitas). Sedangkan pada gambar 7.b asumsi transitivitas terpenuhi.

4. *More is better*, banyak lebih disukai dari sedikit



Gambar 8. Kurva indiferen yang berada pada sisi kanan lebih disukai, karena *more is better*

BAB VII
APLIKASI TEORI BARISAN DAN DERET DALAM EKONOMI

A. Pengertian Baris dan Deret

1. Barisan

Barisan merupakan serangkaian kejadian yang diurutkan. Dalam dunia nyata dapat dicontohkan dengan urutan kejadian pada kasus kriminal yang dibuat untuk memudahkan polisi dalam menganalisa kasus. Dalam matematika urutan tersebut berbentuk deretan bilangan yang dikenal dengan barisan dan deret. Pada dasarnya barisan dan deret selalu berkaitan dengan bilangan-bilangan yang dihubungkan dengan aturan-aturan tertentu.

Dalam permasalahan barisan biasanya terdapat sebarisan bilangan dimana kita diminta untuk menentukan suku berikutnya atau aturan yang dipakai untuk membentuk barisan tersebut. Sebagai contoh pada suatu tes yang menginstruksikan untuk menentukan dua suku selanjutnya dan aturan-aturan yang dipakai untuk menyusun barisan:

a. $1, 3, 5, 7, \ldots$
b. $2, 4, 6, 8, \ldots$

Pada dasarnya suku-suku (s) atau unsur-unsur (u) barisan merupakan nilai dari suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli $\text{A} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Pemetaan dilakukan dari himpunan $\text{A} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ke himpunan suku-suku pada barisan dengan aturan yang merupakan suatu rumus untuk barisan tersebut.

Fungsi u pada barisan a) $1, 3, 5, 7, \ldots$ memiliki aturan yang mungkin adalah $u_n = 2n - 1$ dengan $n \epsilon \text{ A} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Aturan ini dipakai untuk menentukan suku ke-n dari barisan tersebut. Dari contoh ini terlihat pemetaan satu-satu antara bilangan asli n ke suku ke-n (u_n) dari barisan tersebut.

$$1 \leftrightarrow u_1 = 2(1) - 1 = 1$$
$$2 \leftrightarrow u_2 = 2(2) - 1 = 3$$
$$3 \leftrightarrow u_3 = 2(3) - 1 = 5$$

Dan seterusnya, sampai

$n \leftrightarrow u_n = 2(n) - 1$

Dari penjelasan, bisa disimpulkan terdapat beberapa cara untuk menyatakan suatu barisan, yaitu:

a. $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ atau $\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ dengan $n \in A = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
b. $\{u_n\}$ dengan $n \in A = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
c. $f : n \rightarrow u_n$ dengan $n \in A = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

Mari perhatikan contoh barisan bilangan berikut:

1) $2, 4, 6, 8, \ldots$
2) $50, 47, 44, 41, 38, \ldots$

Pada contoh a) 2, 4, 6, 8, ... suku partama $u_1 = 2$, suku kedua $u_2 = 4$ didapat dari menambahkan 2 dengan u_1, kemudian untuk suku ketiga $u_3 = 6$ diperoleh dengan menambahkan 2 dan u_2, begitupula seterusnya. Maka terlihat bahwa **selisih** dari tiap suku yang berdampingan pada barisan ini adalah **tetap**, yaitu 2.

Barisan seperti contoh a) dan b) dinamakan **barisan aritmetika** dan selisih yang tetap dari barisan itu disebut **beda barisan**.

Jika terdapat $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ ialah **barisan aritmetika**, dan berlaku:

$$u_n - (u_n - 1) = \ konstanta$$

Konstanta ini disebut **beda**, dan disimbolkan dengan **b**.

1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ bedanya adalah
   $4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = \cdots = 2$
2) $50, 47, 44, 41, 38, \ldots$ bedanya adalah
   $47 - 50 = 44 - 47 = 41 - 44 = \cdots = -3$

Dari penjelasan di atas terlihat jelas, bahwa suatu barisan bilangan akan dinamakan barisan aritmetika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap (definisi).

Selanjutnya mari menentukan rumus umum barisan aritmetika berdasarkan contoh di atas. Jika suku pertama barisan aritmetika u_1 dimisalkan a, maka didapat

$u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \rightarrow u_2 = u_1 + b = a + b$

$u_3 - u_2 = b \rightarrow u_3 = u_2 + b = (a + b) + b$

$= a + 2b$

dan seterusnya, sehingga didapat barisan aritmetika dalam bentuk:

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots, a (n - 1)b$$

Dari sini kita dapatkan **bentuk umum rumus suku ke-n** barisan aritmetika, yaitu:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh

Tentukan suku ke 12 dari barisan $6, 11, 16, 21, \ldots$

Diketahui: $a = 6$; $b = 11 - 6 = 5$

Ditanya: U_{12}

Penyelesaian:

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_{12} = 6 + (12 - 1)5$

$U_{12} = 6 + (11)5 = 61$

Jadi, suku ke 12 dari barisan $6, 11, 16, 21, \ldots$ adalah 61

b. Deret Aritmetika

Dalam bahasa umum kata-kata barisan dan deret pada dasarnya merupakan sinonim, namun dalam matematika terdapat perbedaan antara keduanya. Dimana deret merupakan jumlah dari suatu barisan. Contohnya saat kita diminta menghitung jumlah seratus bilangan asli yang pertama. Untuk mempermudah menjumlahkannya kita bisa menggunakan cara yang ditemukan seorang matematikawan besar yaitu Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), sebagai berikut:

Jumlah dari $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$ adalah:

$1 + 100 = 101$

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

Dan seterusnya, sampai

$50 + 51 = 101$

Dari uraian di atas terlihat terdapat 50 pasang bilangan yang berjumlah 101. Dengan demikian, jumlah seratus bilangan asli yang pertama adalah $50 \times 101 = 5050$. Di sini kita menggunakan cara yang sama untuk menemukan rumus jumlah semua bilangan asli dari 1 sampai n, yaitu:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$

Adalah:

$1 + n = n + 1$

$2 + (n - 1) = n + 1$

$3 + (n - 2) = n + 1$

Dan seterusnya.

Pada uraian di atas terdapat $\frac{n}{2}$ pasang bilangan yang bernilai $(n + 1)$. Dengan demikian jumlah $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n}{2}(n - 1)$. Jika dilihat rumus jumlah semua bilangan asli dari 1 sampai n di atas,

Suku pertama = 1

Suku terakhir = n

Beda = 1

Jadi, jika terdapat deret bilangan yang suku pertama **a**, suku terakhir **n**, dan beda **b** kita dapat menggunakan rumus:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n) = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Contoh

Tentukan jumlah 12 suku pertama dari barisan $6, 11, 16, 21, \ldots$

Diketahui: $a = 6\ ; b = 5$

Ditanya: S_{12}

Penyelesaian

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2(6) + (12-1)5)$

$S_{12} = 6(12 + 55)$

$S_{12} = 6(67) = 402$

Jadi, jumlah 12 suku dari barisan $6, 11, 16, 21, \ldots$ adalah 402.

c. Barisan dan Deret Geometri

1) Barisan Geometri

Mari perhatikan contoh barisan berikut ini:

a) 1, 3, 9, 27, …
b) 27, -9, 3, -1, …
c) -2, 2, -2, 2, …

Untuk contoh a) tiap suku-sukunya diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya dengan 3 dan hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap, yaitu 3. Barisan-barisan seperti contoh di atas, disebut barisan geometri. Syarat barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ dinamakan barisan geometri adalah:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = konstanta$$

Konstanta ini dinamakan **rasio**, pembanding, atau pembagi dan dinyatakan dengan huruf **r**.

a) 1, 3, 9, 27, … rasionya $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \cdots = 3$
b) 27, -9, 3, -1,… rasionya $\frac{27}{-9} = \frac{-9}{3} = \frac{-1}{3} = \cdots = \frac{-1}{3}$
c) -2, 2, -2, 2, … rasionya $\frac{-2}{2} = \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = \cdots = -1$

Dari penjelasan di atas, dapatlah kita simpulkan, bahwa suatu barisan dinamakan **barisan geometri** jika dan hanya jika hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap (definisi). Hasil bagi yang tetap ini disebut rasio dan disingkat dengan r.

Selanjutnya mari lihat bentuk umum suku ke-n dari barisan geometri dengan suku pertama u_1 yang dinyatakan dengan a.

$$\frac{u_2}{u_1} = r \rightarrow u_2 = u_1 r \rightarrow u_2 = ar$$
$$\frac{u_3}{u_2} = r \rightarrow u_3 = u_2 r \rightarrow u_3 = ar \cdot r = ar^2$$
$$\frac{u_4}{u_3} = r \rightarrow u_4 = u_3 r \rightarrow u_4 = ar^2 \cdot r = ar^3$$

dan seterusnya, sehingga didapat barisan geometri dalam bentuk baku, yaitu:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^{n-1}$$

Perhatikan bahwa urutan ke-n merupakan **bentuk umum rumus suku ke-n barisan geometri**, yaitu:

$$U_n = ar^{n-1}$$

Contoh

Tentukan suku ke 9 dari $1, 3, 9, 27, \ldots$

Diketahui: $a = 1; r = 3$

Ditanya: U_9

Penyelesaian:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_9 = (1)(3)^8 = 6.561$

Jadi suku ke 9 dari $1, 3, 9, 27, \ldots$ adalah 6.561.

2) Deret Geometri

Seperti halnya deret aritmetika, bahwa suatu deret geometri adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan geometri (definisi). Jika barisan geometrinya dinyatakan dalam bentuk baku, yaitu

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Maka deret geometrinya adalah

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

Selanjutnya rumus **jumlah n suku pertama suatu deret geometri**, adalah:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \; ; jika \; r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \; ; r < 1$$

Contoh

Tentukan jumlah 7 suku dari barisan dari $1, 3, 9, 27, \dots$

Diketahui: $a = 1$; $r = 3$

Ditanya: S_7

Penyelesaian

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \; ; r > 1$$

$$S_7 = \frac{1(3^7 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_7 = \frac{1(2.187 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_7 = \frac{2.186}{2} = 1.093$$

Jadi, jumlah 7 suku dari barisan dari $1, 3, 9, 27, \dots$ adalah 1.093.

3) Deret Geometri Tak Hingga

Adapun bentuk umum deret geometri tak hingga dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

Dan rumus jumlahnya adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}\ ; untuk\ \ -1 < r < 1$$

Contoh

Tentukan jumlah deret geometri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Diketahui: $a = 1; r = \frac{1}{2}$

Ditanya: S_∞

Penyelesaian:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, jumlah deret geometri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ adalah $\frac{1}{2}$.

Latihan

1. Tentukan suku ke-30 dari barisan $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
2. Tentukan jumlah 25 suku pertama dari barisan $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
3. Tentukan suku ke-17 dari barisan $2, 4, 8, 16, \ldots$
4. Berikut ini adalah deret geometri:
   $\frac{2}{6} + \frac{2}{3} + 2 + \cdots + s = \frac{121}{3}$.
   Berapakah nilai s yang sesuai dengan deret di atas ?
5. Tentukan jumlah seluruh suku dari $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$

B. Bunga Sederhana dan Potongan Sederhana

1. Bunga Sederhana

Mari perhatikan ilustrasi berikut ini:

> X meminjam Rp 500.000,00 dan menandatangani surat perjanjian yang berisi bahwa pada akhir bulan ke enam, X akan membayar RP 500.000,00 dan ditambah RP 12.500,00.

Kelebihan uang yang dikembalikan X sejumlah Rp 12.500,00 pada ilustrasi diatas merupakan bunga.

Jadi, **bunga** adalah imbal jasa atau kompesasi atas pinjaman uang. Kita membayar bunga kepada pihak bank jika kita meminjam uang dari bank tersebut. Sebaliknya, pihak bank membayar bunga kepada kita bila kita menginvestasikan uang berupa tabungan atau deposito di bank.

Jumlah uang yang dipinjamkan atau diinvestasikan disebut *modal awal* atau *pinjaman pokok* (principal). Maka, bunga dilihat dari satu pihak merupakan pendapatan, tetapi di pihak lain merupakan biaya. Selanjutnya perhatikan ilustrasi berikut:

> X menabung sejumlah Rp 1000.000 di sebuah bank. Dia mendapatkan bunga 10% perbulan, dalam bentuk bunga sederhana. Maka setiap bulan dia mendapatkan $1.000.000 \times 10\% = 100.000$ setiap bulan. Pada akhir bulan pertama dia mendapatkan Rp 100.000, sehingga tabungannya menjadi Rp 1.100.000. Pada bulan kedua dia mendapatkan Rp 100.000, sehingga tabungannya menjadi Rp 1.200.000 demikian seterusnya. Jadi, setiap bulan tabungan X bertambah Rp100.000.

Dari ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa perusahaan dalam hal ini bank menghitung bunga sederhana (*simple interest*) atas jumlah pokok saja. Ini merupakan pengembalian (atau pertumbuhan) pokok untuk satu periode waktu. Persamaan berikut mengungkapkan bunga sederhana:

$$\mathrm{I} = \mathrm{Pin}$$

Keterangan:

I = Jumlah pendapatan bunga
P = Pinjaman pokok
i = Tingkat bunga tahunan
n = jumlah tahun

Kemudian, untuk memperoleh nilai dari modal awal (P) yang terakumulasi di masa datang atau pada akhir tahun ke-n (F_n) dapat dihitung dengan cara, modal awal (P) ditambah dengan semua pendapatan bunga selama periode waktu (n). Dinyatakan dengan rumus berikut:

$$F_n = P + Pin \quad \text{atau} \quad F_n = P(1 + in)$$

Contoh:
Hitunglah pendapatan bunga sederhana dan berapa nilai yang terakumulasi di masa datang dari jumlah uang sebesar Rp10.000.000 yang diinvestasikan di bank selama empat tahun dengan bunga 12% pertahun per tahun.
Jawab:

Diketahui:
P = Rp 10.000.000 ; n = 4 ; i =15 % pertahun
Ditanya: I dan F_4

Penyelesaian:
Dengan menggunakan rumus langsung pendapatan bunga adalah:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{Pin} \\ &= 10.000.000(4)(0{,}15) \\ &= 6.000.000 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai terakumulasi di masa datang pada tahun ke-4 (F_4) adalah:

$$\begin{aligned} F_4 &= P + Pin \\ &= 10.0000.000 + 6.000.000 \\ &= 16.000.000 \end{aligned}$$

Jadi, Pendapatan bunga sederhana sebesar Rp 6.000.000 dan nilai yang terakumulasi di masa datang sebesar Rp 16.000.000.

2. Potongan Sederhana

Potongan Sederhana (*simple discount*) merupakan proses yang digunakan untuk memperoleh perhitungan nilai sekarang dari suatu nilai masa datang tertentu. Berikut rumus untuk memperoleh nilai sekarang (P):

$$P = \frac{F_n}{(1+in)} \qquad \text{atau} \qquad P = F_n\left[\frac{1}{1+in}\right]$$

keterangan:
P = Nilai sekarang
F_n = Nilai masa datang tahun ke-n
i = Tingkat Bunga
n = Jumlah tahun

Contoh:
X ingin mengetahui berapa banyak nilai uang yang harus di investasikan di bank saat ini jika tingkat bunga di bank pertahun 15% (bukan bunga majemuk), supaya pada akhir tahun keempat nilai uangnya menjadi RP 40.000.000

Jawab:
Diketahui: F_4 = Rp 40.000.000 ; i =15 % pertahun ; n = 4
Ditanya: nilai uang yang harus di investasikan di bank saat ini?
Penyelesaian:

$$P = \frac{F_n}{(1+in)}$$
$$= \frac{40.000.000}{(1+0,15(4))}$$
$$= \frac{40.000.000}{1+0,6} = 25.000.000$$

Jadi, X harus menginvestasikan Rp25.000.000 agar bisa mencapai Rp40.000.000 pada akhir tahun keempat.

Latihan

1. Tentukan bunga sederhana dan berapa nilai yang terakumulasi di masa datang dari jumlah uang sebesar Rp 750.000 dengan bunga 4% dalam waktu $\frac{1}{2}$ tahun!
2. Tentukan bunga sederhana dan berapa nilai yang terakumulasi di masa datang dari P = Rp. 2.500.000; n= 18 bulan; i= 7% pertahun.
3. Berapa jumlah uang yang harus di investasikan jika tingkat bunga yang diberikan pertahun 17% (bukan bunga majemuk),

supaya pada akhir tahun kedua nilai uangnya menjadi RP 35.000.000

C. Nilai Sekarang dengan Bunga Majemuk

Sebagaimana diketahui bahwa suatu investasi dari P rupiah akan terakumulasi di masa datang menjadi $P = (1 + i)$ pada akhir tahun ke-n dengan tingkat bunga i per tahun. Tetapi seringkali perlu untuk menentukan berapa banyak nilai uang yang harus diinvestasikan sekarang supaya mempunyai jumlah tertentu pada akhir tahun ke-n. Perhatikan ilustrasi berikut:

Andaikan kita menginginkan uang tabungan kita dalam lima tahun kedepan berjumlah Rp10.000.000 dengan tingkat bunga 10% (bunga majemuk). Berapakah uang yang akan kita tabung untuk modal awal.

Dengan kata lain, kita perlu mengetahui berapa nilai uang sekarang dari sejumlah nilai uang yang telah kita tentukan nilainya di masa datang. Untuk mengetahui nilai sekarang dengan bunga majemuk dari suatu nilai masa datang dapat diperoleh dengan:

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Keterangan:
P = Nilai sekarang
F_n = Nilai masa datang tahun ke-n
i = Tingkat bunga per tahun
n = Jumlah tahun

Contoh:
Y merencanakan uang tabungannya di bank sejumlah Rp 20.000.000 pada tahun ketiga dengan tingkat bunga yang berlaku 13% per tahun (bunga majemuk). Berapakah jumlah uang tabungan Y saat ini?

Diketahui: F_3= Rp. 20.000.000 ; i = 13% pertahun ; n=3
Ditanya: Jumlah uang tabungan Y saat ini?

Penyelesaian:

$$P = \left(\frac{F_n}{(1+i)^n}\right)$$

$$P = \left(\frac{20.000.000}{(1+0{,}13)^3}\right)$$

$$P = \left(\frac{20.000.000}{1{,}13^3}\right)$$

$$P = \left(\frac{20.000.000}{1{,}442897}\right)$$

$$P = 13.861.003{,}2$$

Jadi, jumlah uang tabungan Y saat ini adalah Rp13.861.003,2.

Selanjutnya, pembayaran bunga majemuk pada nilai sekarang dapat dilakukan beberapa kali dalam setahun. Misalkan frekuensi pembayaran bunga dalam setahun m kali, maka rumus untuk menghitung nilai sekarang adalah sebagai berikut:

$$P = \frac{F_n}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

Keterangan:

P = Nilai sekarang
F_n = Nilai masa datang tahun ke-n
i = Tingkat bunga per tahun
n = Jumlah tahun
m = Frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Contoh:

Y berharap lima tahun kedepan mendapatkan dana sebanyak Rp50.000.000. Jika tingkat bunga yang berlaku saat ini 15% pertahun dan dibayarkan secara semesteran. Berapakah jumlah dana yang harus ditabung saat ini?

Diketahui: $F_5 = Rp50.000.000$; i =15%pertahun ; m=2 ; n=5
Ditanya: Jumlah dana yang harus ditabung?

Penyelesaian:

$$P = \frac{F_n}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

$$P = \frac{50.000.000}{\left(1+\frac{0,15}{2}\right)^{5(2)}}$$

$$P = \frac{50.000.000}{(1,075)^{10}}$$

$$P = \frac{50.000.000}{2,06103156}$$

$$P = 24.259.696,4$$

Jadi, jumlah dana yang ditabung adalah Rp 24.259.696,4.

Latihan

1. Berapakah jumlah tabungan saat ini, jika A menginginkan tabungannya di bank pada tahun kedua berjumlah Rp 15.000.000 dengan tingkat bunga yang berlaku 15% per tahun (bunga majemuk)?
2. B merencanakan uang tabungannya di bank pada tahun ketujuh berjumlah Rp 97.000.000 dengan bunga yang dimajemukkan. Tingkat bunga yang berlaku 20% pertahun. Berapakah jumlah uang tabungan B saat ini?
3. C berharap tiga tahun kedepan mendapatkan dana sebanyak Rp30.000.000. Jika tingkat bunga yang berlaku saat ini 18% pertahun dan dibayarkan secara kwartalan. Berapakah jumlah dana yang harus ditabung saat ini?

D. Nilai Sekarang dan Masa Depan dengan Anuitas

Anuitas adalah suatu rangkaian pembayaran dengan jumlah yang sama atau tetap pada periode waktu tertentu. Di samping itu, anuitas ini diasumnsikan bahwa semua pembayaran dibuat pada akhir periode dengan bunga majemuk. Demikian pula dengan pembayaran pendapatan bunga akan diperoleh dari nilai anuitas pada akhir periode.

Hal ini beralasan karena akhir dari setiap periode akan bersamaan dengan permulaan dari periode berikutnya. Perhatikan ilustrasi berikut:

1. Santunan yang diterima rutin dari sebuah asuransi;
2. Bunga yang diterima dari obligasi.

Jika deposito dengan P rupiah dibuat pada akhir dari setiap periode maka nilai total yang terakumulasi dari anuitas setelah n periode pembayaran adalah:

$$S_n = P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Keterangan:

S_n = Jumlah nilai masa datang dari anuitas setelah n periode
P = Jumlah dari anuitas
i = tingkat bunga
n = Jumlah periode pembayaran

Contoh:

Z ingin menabung uangnya sebanyak R5.000.000 setiap akhir tahun di suatu bank, di mana pembayaran bunga 10% per tahun secara majemuk. Transaksi tabungan untuk tahun pertama di bank tersebut dibuat pada tahun 2016 dan terakhir akan dibuat pada tahun 2021. Berapa jumlah uang tabungan dari Z pada akhir tahun 2021?

Jawab:

Diketahui: P = Rp5.000.000 ; i = 10 % pertahun; n =5

Ditanya: Jumlah tabungan Z pada akhir tahun 2021?

Penyelesaian:

$$S_n = P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$S_5 = 5.000.000\left(\frac{(1+0{,}10)^5 - 1}{0{,}10}\right)$$

$$S_5 = 5.000.000\left(\frac{(1{,}1)^5 - 1}{0{,}10}\right)$$

$S_5 = 5.000.000(6{,}1051)$
$S_5 = 30.525.500$

Jadi, nilai masa datang dari anuitas setelah 5 periode yang dibayarkan secara majemuk adalah Rp 30.525.500.

Latihan

1. A berencana menabung uangnya di bank sebesar Rp 8.000.000 setiap awal bulan selama satu tahun. jika tingkat bunga 9% per tahun, berapakah jumlah nilai uang A di masa datang bila pembayaran bunga dibayar secara bulanan.
2. B ingin menabung uangnya sebanyak Rp 6.000.000 setiap akhir tahun di suatu bank, di mana pembayaran bunga 14% per tahun secara majemuk. Transaksi tabungan untuk tahun pertama di bank tersebut dibuat pada tahun 2018 dan terakhir akan dibuat pada tahun 2022. Berapa jumlah uang tabungan dari B pada akhir tahun 2022?
3. C memiliki tabungan tetap Rp 10.000.000 yang disetorkan setiap akhir tahun selama 6 tahun. Apabila tingkat bunga yang diberikan 10 % yang diberikan pada akhir tahun, Tentukan jumlah uang tabungan C pada akhir tahun ke-6!

BAB VIII
FUNGSI SATU VARIABEL BEBAS DALAM EKONOMI

A. Elastisitas Permintaan dan Penawaran

Elastisitas permintaan dan penawaran merupakan nilai persentase yang menunjukkan besar perubahan baik permintaan maupun penawaran. Telah diketahui bahwa permintaan terhadap suatu barang dapat dipengaruhi oleh harga, pendapatan konsumen dan harga barang lain. Begitu juga untuk penawaran suatu barang, sangat dipengaruhi oleh variabel biaya produksinya. Bila permintaan dan penawaran tidak berubah terhadap perubahan variabelnya maka disebut inelastis. Elastisitas permintaan (η_d) merupakan nilai persentase yang menunjukkan besar perubahan yang terjadi pada jumlah permintaan akibat adanya perubahan variabel yang mempengaruhinya. Beberapa variabel yang mempengaruhi permintaan ini antara lain: harga barang itu sendiri, pendapatan, harga barang substitusi dan komplementer. Dari beberapa variabel ini elastisitas permintaan dapat dibedakan atas elastisitas permintaan terhadap harga, elastisitas permintaan terhadap pendapatan dan elastisitas permintaan silang. Secara matematis elastisitas permintaan terhadap harga dituliskan dengan,

$$\underset{permintaan}{elastisitas}(\eta_d) = \frac{\%perubahan\ jumlah\ permintaan\ (Q)}{\%perubahan\ harga\ (P)}$$

atau,

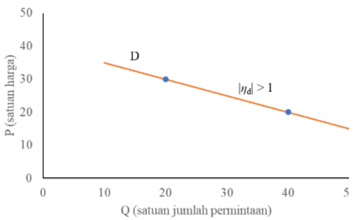
$$\eta_d = \frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0} = \frac{P_0}{Q_0}\frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

dimana ΔQ merupakan perubahan jumlah permintaan Q_0 ke Q_1 dengan berubahnya harga ΔP dari P_0 ke P_1. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan elastisitas titik. Hubungan antara jumlah permintaan dengan harga akan negatif artinya kenaikan pada harga akan membuat jumlah permintaan akan menurun. Dapat juga dikatakan penurunan jumlah permintaan diakibatkan adanya kenaikan pada harga. Bila mempertimbangkan limit dari ΔQ dan ΔP yang mendekati nol, parameter ini dapat didekati dengan diferensialnya dQ dan dP. Sehingga, penulisan persamaannya dapat bentuk menjadi,

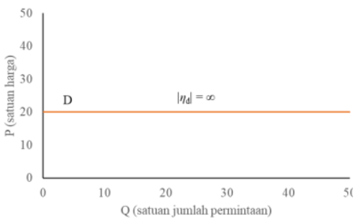
$$\eta_d = \frac{P_d}{Q_d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

dengan P_d adalah harga dan Q_d adalah permintaan pada nilai elastisitas permintaan ditentukan.

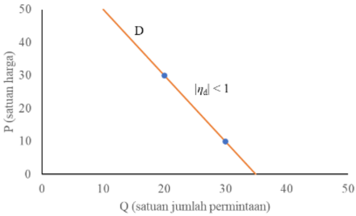
Jenis kurva permintaan dapat dibedakan berdasarkan nilai dari elastisitasnya. Bila nilai $|\eta_d| > 1$ disebut juga permintaan elastis terhadap harga, maka perubahan harga akan mempengaruhi perubahan yang tinggi pada jumlah permintaan. Permintaan elastis sempurna terjadi ketika $\eta_d = \infty$, dimana jumlah permintaaan terus meningkat tanpa perubahan harga. Bila nilai $|\eta_d| < 1$ disebut juga permintaan inelastis terhadap harga, maka perubahan harga akan mempengaruhi perubahan yang rendah pada jumlah permintaan. Permintaan inelastis sempurna terjadi ketika $\eta_d = 0$ dimana terjadi perubahan harga namun jumlah permintaannya tetap. Sedangkan nilai $|\eta_d| = 1$ disebut juga permintaan elastis uniter, dimana perubahan harga akan proporsional sebanding dengan perubahan jumlah permintaan. Secara ilustrasi digambarkan sebagai berikut,



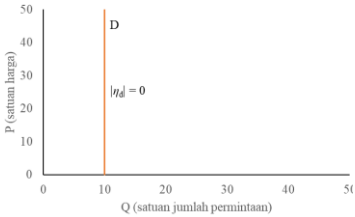
a. elastis



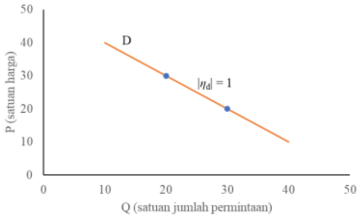
b. elastis sempurna



c. inelastis



d. inelastis sempurna



e. elastis uniter

Gambar 9.A.1. Kurva permintaan.

Sebagai contoh, tentukan elastisitas permintaan pada saat harga berubah dari 130 menjadi 106, dimana fungsi permintaannya adalah $P = 150 - Q^2$.

Dari persoalan tersebut diketahui $P_0 = 130$ dan $P_1 = 106$. Untuk menentukan nilai permintaannya gunakan fungsi permintaannya yang diberikan.

Q_1 ditentukan dengan

$$P_0 = 155 - Q_0^2$$
$$130 = 155 - Q_0^2$$
$$130 - 155 = -Q_0^2$$
$$-25 = -Q_0^2$$
$$Q_0 = 5$$

Demikian juga dengan Q_2 ditentukan dengan

$$P_1 = 155 - Q_1^2$$

$$106 = 155 - Q_1^2$$
$$106 - 155 = -Q_1^2$$
$$-49 = -Q_1^2$$
$$Q_1 = 7$$

dengan menggunakan persamaan

$$\eta_d = \frac{P_0}{Q_0}\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{P_0(Q_1 - Q_0)}{Q_0(P_1 - P_0)} = \frac{130(7-5)}{5(106-130)}$$
$$\eta_d = \frac{260}{-120} = -2{,}167$$

diperoleh $|\eta_d| > 1$ sehingga elastisitas permintaannya adalah elastis.

Contoh berikutnya, tentukan elastisitas permintaan ketika harganya adalah 20 dengan persamaan permintaan $P = 100 - Q$

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensial. Dari persamaan,

$$P = 100 - Q$$
$$Q = 100 - P$$

diferensial Q terhadap P diperoleh

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = -1$$

selanjutnya, nilai Q_d ditentukan dengan nilai $P_d = 20$ dari persamaan

$$Q_d = 100 - 20 = 80$$

sehingga, untuk elastisitas permintaannya menjadi

$$\eta_d = \frac{P_d}{Q_d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{20}{80}(-1) = -0{,}25$$

diperoleh $|\eta_d| < 1$ sehingga elastisitas permintaannya adalah inelastis.

Perhitungan nilai elastisitas ini dapat dilakukan dengan menerapkan metode nilai tengah, untuk mengurangi adanya sudut pandang yang berbeda dalam menerjemahkan perubahan. Persamaan elastisitas permintaan berubah menjadi,

$$\eta_d = \frac{\frac{\Delta Q}{(Q_1 + Q_0)/2}}{\frac{\Delta P}{(P_1 + P_0)/2}}$$

Nilai elastisitas permintaan ini dikenal sebagai elastisitas busur.

Elastisitas penawaran (η_s) merupakan nilai presentase yang menunjukan perubahan yang terjadi pada jumlah penawaran akibat adanya perubahan variabel yang mempengaruhi penawarannya. Harga penawaran dapat dipengaruhi harga barang itu sendiri, biaya produksi dan perkembangan teknologi. Elastisitas penawaran terhadap harga dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\substack{elastisitas \\ penawaran}(\eta_s) = \frac{\%perubahan\ jumlah\ penawaran\ (Q)}{\%perubahan\ harga\ (P)}$$

atau,

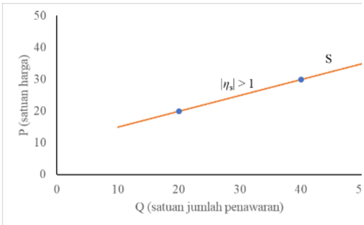
$$\eta_s = \frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0} = \frac{P_0}{Q_0}\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{P_s}{Q_s}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

dan untuk elastisitas penawaran dengan metode nilai tengah dituliskan sebagai,

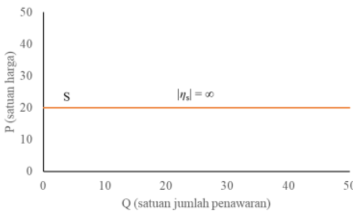
$$\eta_s = \frac{\frac{\Delta Q}{(Q_1 + Q_0)/2}}{\frac{\Delta P}{(P_1 + P_0)/2}}$$

Jenis kurva penawaran berdasarkan nilai elastisitasnya serupa dengan kurva permintaan dibagi atas lima jenis. Bila nilai $|\eta_s| > 1$ disebut juga penawaran elastis terhadap harga, maka perubahan harga akan mempengaruhi perubahan yang tinggi pada jumlah penawaran.

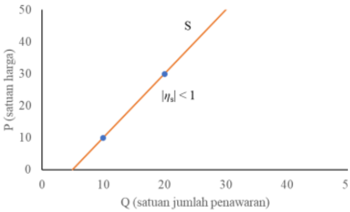
Penawaran elastis sempurna terjadi ketika $\eta_s = \infty$, dimana jumlah penawaran terus meningkat tanpa perubahan harga. Bila nilai $|\eta_s| < 1$ disebut juga penawaran inelastis terhadap harga, maka perubahan harga akan mempengaruhi perubahan yang rendah pada jumlah penawaran. Permintaan inelastis sempurna terjadi ketika $\eta_s = 0$ dimana terjadi perubahan harga namun jumlah penawarannya tetap. Sedangkan nilai $|\eta_s| = 1$ disebut juga penawaran elastis uniter, dimana perubahan harga akan proporsional sebanding dengan perubahan jumlah penawaran. Ilustrasi dari kurva penawaran digambarkan sebagai berikut,



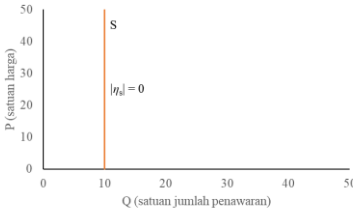
a. elastis



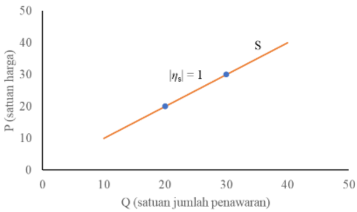
b. elastis sempurna



c. inelastis



d. inelastis sempurna



e. elastis uniter

Gambar 9.A.2. Kurva penawaran.

Berikutnya adalah contoh soal, dimana diketahui persamaan permintaan dan penawaran,

$$Q_d = 1000 - 2P$$
$$Q_p = 800 + 3P$$

Tentukan elastisitas harga permintaan dan penawaran pada titik kesetimbangan!

Untuk menjawab persoalan tersebut, tentukan harga dan jumlah perminaan atau penawaran pada titik kesetimbangan yang terjadi pada $Q_d = Q_s$,

$$Q_d = Q_p$$
$$1000 - 2P = 800 + 3P$$
$$5P = 200$$
$$P = 40$$

pada saat nilai P = 40, dan nilai Q = 920

untuk menetukan nilai elastisitasnya, dapat digunakan diferensial dari fungsi Q_d dan Q_s. Untuk elastisitas permintaan,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = -2$$
$$\eta_d = \frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{40}{920}(-2) = -0{,}086$$

Perhitungan untuk elastisitas penawarannya adalah,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = 3$$
$$\eta_s = \frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{40}{920}(3) = 0{,}130$$

B. Laba Maksimum dan Penerimaan Maksimum dari Pajak

Laba Maksimum.

Secara matematis dituliskan sebagai,

$$\pi = R - C = f(Q)$$

Laba akan mencapai maksimum bila memenuhi syarat:

1. Syarat yang diperlukan, diferensial pertama laba bernilai nol.
$$\pi' = 0$$

2. Syarat yang mencukupi, iferensial kedua dari laba bernilai kurang dari nol.
$$\pi'' < 0$$

Penerimaan Maksimum dari Perpajakan.

Untuk fungsi penerimaan total maksimum dari perpajakan (T) yang dinyatakan sebagai fungsi keluaran yang dihasilkan Q dengan t sebagai pajak spesifik atas setiap unit barang yang dihasilkan, ditulis secara matematis,
$$T = f(Q) = tQ$$
akan mencapai maksimum bila memenuhi syarat:

1. Syarat yang diperlukan, diferensial pertama penerimaan total maksimum dari perpajakan bernilai nol.
$$T' = 0$$

2. Syarat yang mencukupi, diferensial kedua dari penerimaan total maksimum dari perpajakan bernilai kurang dari nol.
$$T'' < 0$$

Berikut ini langkah-langkah untuk menyelesaikan persoalan penerimaan total maksimum dari perpajakan, dengan diketahui fungsi permintaan suatu barang $P_d = c - dQ$ dan fungsi penawaran $P_s = a + bQ$. Pemerintah mengenakan pajak spesifik t atas setiap unit barang yang dihasilkan, dan T adalah total pajak.

1. Tentukan persamaan penawaran setelah pajak $P_s = a + bQ + t$
2. Ubah penawaran menjadi bentuk fungsi pajak spesifik, $t = P_s - a - bQ$
3. Dalam keadaan setimbang $P_d = P_s$ substitusikan fungsi permintaan ke dalam fungsi pajak spesifik, sehingga menjadi, $t = (c - dQ) - a - bQ = (c - a) - (d + b)Q$
4. Untuk persamaan total maksimum pajak dapat dituliskan $T = tQ = (c - a)Q - (d + b)Q^2$

5. Selesaikan persamaan T dengan syarat yang diperlukan dan syarat yang mencukupi.

Contoh soal, diketahui fungsi permintaan suatu adalah $-4Q + 110$ dengan fungsi penawarannya adalah $3Q + 40$. Tentukanlah pajak spesifiknya dan penerimaan maksimum dari pajak tersebut.

Penyelesaiannya adalah sebagai berikut,

1. Fungsi penawaran dan permintaannya dituliskan dengan,
   $P_s = 3Q + 40$
   $P_d = -4Q + 110$
2. Untuk fungsi dari pajak spesifiknya adalah
   $P_s = 3Q + 40 + t$ yang diubah menjadi,
   $t = P_s - 3Q - 40$
   dengan substitusi P_s dengan P_d manjadi,
   $t = (-4Q + 110) - 3Q - 40 = -7Q + 70$
3. Persamaan total maksimum pajak
   $T = tQ = (-7Q + 70)\,Q = -7Q^2 + 70Q$

   Syarat yang diperlukan adalah $T' = 0$,
   $T' = -14Q + 70 = 0$, maka
   $-14Q + 70 = 0$
   $-14Q = -70$
   $Q = 5$

   Syarat yang mencukupi adalah $T'' < 0$
   $T'' = -14$, sehingga $T'' < 0$ terpenuhi.

   Untuk menjawab besar pajak spesifik dengan $Q = 5$,
   $t = -7Q + 70 = -7(5) + 70 = -35 + 70 = 35$

   Sedangkan penerimaan maksimum dari pajak sebesar,
   $T = -7Q^2 + 70Q = -7(5)^2 + 70(5) = -175 + 350 = 175$

   atau,
   $T = tQ = 35(5) = 175$

C. Pengaruh Pajak dalam Pasar Monopoli dan Model-Model Persediaan

Monopoli merupakan bentuk persaingan pasar yang tidak sempurna, dimana ada satu penjual atau produsen yang dapat menguasai pasar terhadap barang atau jasa tertentu, sehingga dapat mengendalikan harga dengan mengatur jumlah barang yang ditawarkan. Harga dapat dinaikkan dengan mengurangi jumlah barang atau jasa yang ditawarkan, sebaliknya harga akan turun dengan menambah jumlah barang atau jasa yang ditawarkan. Pajak yang diberikan pada barang yang disediakan oleh pemegang monopoli tentunya akan menaikkan biaya per unit produknya. Dalam penerapannya pajak yang dikenakan dapat bersifat tetap dan juga bersifat khusus. Untuk pajak yang bersifat tetap tidak dipengaruhi oleh volume produksi yang dihasilkan. Sedangkan untuk pajak khusus dikenakan berdasarkan volume produksi yang dihasilkan. Secara matematis biaya produk setelah pajak $(\bar{C_t})$ adalah

$$\bar{C_t} = \bar{C} + t$$

dimana $\bar{C}$ adalah biaya produk dan t adalah pajak spesifik setiap unit barang, sedangkan untuk biaya total setelah pajak (C_t) dituliskan

$$C_t = C + tQ = Q\bar{C_t}$$

dengan adanya pajak akan mempengaruhi besarnya laba yang diperoleh. Perhitungan untuk laba akan terkoreksi dengan pajak, dituliskan dengan persamaan

$$\pi = R - C_t = R - C - tQ$$

Laba dalam persamaan tersebut akan bernilai maksimum dengan memenuhi dua syarat, yaitu:

1. Diferensial pertama laba bernilai nol dengan diferensial pertama dari penerimaan sama dengan biaya total setelah pajak sebagai syarat yang diperlukan.

$$\pi' = 0;\ R' = C_t'$$

2. Selain itu, diferensial kedua dari laba bernilai kurang dari nol dengan diferensial kedua dari penerimaan kurang dari biaya total setelah pajak sebagai syarat yang mencukupi.

$$\pi'' < 0;\ R'' < C_t''$$

Sebagai contoh, bila dalam suatu pasar monopoli diketahui fungsi permintaan terhadap sejenis barang $Q = -P + 10$ dan biaya rata-rata per unit $\bar{C} = 1$. Bila setiap barang yang terjual dikenakan pajak sebesar 0,1 per unit, maka tentukanlah jumlah barang yang harus diproduksi, dan harga per unit barangnya agar mendapat keuntungan yang maksimum, serta tentukan pula besar keuntungannya.

Untuk penyelesaiannya,

$$Q = -P + 10$$
$$P = 10 - Q$$

Fungsi penerimaan totalnya adalah,

$$R = Q \cdot P = Q(10 - Q) = 10Q - Q^2$$

Diferensial pertama dan kedua dari penerimaan total,

$$R' = 10 - 2Q$$
$$R'' = -2$$

Biaya total setelah pajak adalah,

$$\bar{C}_t = \bar{C} + t$$
$$\bar{C}_t = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$
$$C_t = Q\bar{C}_t = Q(1{,}1)$$

Diferensial pertama dan kedua dari biaya total setelah pajak,

$$C_t' = 1{,}1$$
$$C_t'' = 0$$

Fungsi keuntungan dituliskan sebagai berikut,

$$\pi = R - C_t = 10Q - Q^2 - 1{,}1Q = 8{,}9Q - Q^2$$

Syarat yang diperlukan

$$R' = \bar{C}_t$$
$$10 - 2Q = 1{,}1Q$$
$$3{,}1Q = 10$$

$$Q = 10/3,1 = 3,23$$

Syarat yang mencukupi

$$R'' < C_t''$$
$$-2 < 0 \text{ (terpenuhi).}$$

Harga per unit barang pada Q = 3,23 adalah,

$$P = 10 - 3,23 = 6,77$$

dengan keuntungan maksimum yang diperoleh

$$\pi = 8,9Q - Q^2 = 8,9(3,23) - (3,23)^2 = 18,31$$

jadi untuk mendapat keuntungan maksimum maka ditentukan jumlah dan harga barangnya adalah 3,23 dan 6,77, dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah 18,31.

Model-Model Persediaan

Perusahaan perlu melakukan pengendalian persediaan demi menjaga efisiensi dan efektiftivitas dari aktivitas bisnisnya. Persediaan yang tidak memadai dapat menghambat produksi. Sedangkan persediaan yang melimpah akan menimbulkan masalah baru yaitu biaya penyimpanan dan persediaan yang belum tentu dapat dimanfaatkan. Dengan model persediaan ini, dapat dilakukan langkah-langkah untuk meminimalkan biaya total persediaan. Tiga jenis biaya dalam model persediaan antara lain:

1. Biaya pemesanan berbentuk, biaya pemrosesan dan pemesanan, biaya komunikasi, biaya pengepakan, biaya pengiriman.
2. Biaya pemeliharaan persediaan, seperti biaya modal, penyusutan dan biaya penyimpanan.
3. Biaya sesaat, berupa kerugian/kehilangan dari kondisi barang persediaan (*shortage cost*).

Sedangkan model persediaan sediri antara lain:

1. Model persediaan dengan asumsi barang persediaan yang tidak kontinu

Total biaya persediaan (C) model ini dituliskan dengan bentuk,

$$C = \frac{cc \cdot Q}{2} + \frac{sc \cdot D}{Q}$$

dimana cc adalah *carrying cost*, sc adalah *set up cost*, D adalah jumlah permintaan tiap periode, dan Q adalah jumlah barang persediaan. Sebagai syarat biaya persediaan tersebut akan minimum harus memenuhi,

a. Diferensial pertama dari total biaya persediaan terhadap jumlah barang persediaan bernilai nol.

$$\frac{dC}{dQ} = 0$$

b. Diferensial kedua dari total biaya persediaan terhadap jumlah barang persediaan bernilai lebih dari nol dengan jumlah persediaan barang lebih dari nol

$$\frac{d^2C}{dQ^2} = 0$$

untuk Q > 0.

Dari kedua syarat tersebut, diperoleh banyaknya barang yang ditempatkan sebagai persedian dengan biaya minimum adalah,

$$Q = \sqrt{(2 \cdot sc \cdot D)/cc}$$

dalam D/K kali setiap periode.

2. Model persediaan dengan asumsi barang persediaan kontinu selama periode pemesanan atau produksi.

   Bentuk persamaan total biaya persediaan (C) model ini dituliskan dengan bentuk,

$$C = \frac{1}{2} cc \cdot Q \cdot (1 - \frac{D}{k}) + \frac{sc \cdot D}{Q}$$

   dengan k merupakan jumlah barang tiap periode. Syarat untuk total persediaan minimumnya serupa dengan model persedian dengan asumsi barang persediaan tidak kontinu. Dari kedua syarat tersebut, diperoleh banyaknya barang yang ditempatkan sebagai persedian dengan biaya minimum adalah,

$$Q = \sqrt{(2 \cdot sc \cdot D)/cc \cdot [1 - (D/K)]}$$

   dalam D/K kali setiap periode.

Kedua model ini mempunyai asumsi untuk variabel permintaan, harga per unit produk, biaya pemesanan adalah konstan.

Sebagai contoh, suatu perusahaan memproduksi satu jenis barang memerlukan bahan baku 1000 unit tiap semester. Biaya penyimpanan (cc) satu unit per bulan sebesar 2, dengan biaya pemesanannya (sc) sebesar 0,5. Tentukanlah total biaya persediaan yang minimum,

1. Bila perusahaan membeli bahan baku, secara periodik dengan jumlah besar.
2. Bila perusahaan membeli bahan baku, secara terus menerus 200 unit setiap bulan.

Penyelesaian dari persoalan tersebut adalah

1. merupakan kedatangan barang persediaan yang tidak kontinu, dari soal diketahui:
   D = 1000
   sc = 0,5
   cc = 2/bulan · 6 bulan = 12
   tentukan jumlah pesanan agar total biaya persediaan minimum,

$$Q = \sqrt{(2 \cdot sc \cdot D)/cc} = \sqrt{(2 \cdot 0{,}5 \cdot 1000)/12} = \sqrt{250/3}$$
$$Q = 5\sqrt{10/3}$$

   dengan demikian diperoleh biaya persediaan totalnya,

$$C = \frac{cc \cdot Q}{2} + \frac{sc \cdot D}{Q}$$
$$C = \frac{12 \cdot 5\sqrt{10/3}}{2} + \frac{0{,}5 \cdot 1000}{5\sqrt{10/3}} = 60\sqrt{10/3}$$
$$C = 109{,}55$$

   dengan demikian, jumlah pesanan bahan baku agar biaya persediaan totalnya menjadi minimum adalah $5\sqrt{10/3}$ tiap semester dengan biaya persediaan totalnya sebesar 109,55.

2. kedatangan barang persediaan yang kontinu, dari soal diketahui:
   D = 1000
   sc = 0,5
   cc = 2/bulan · 6 bulan = 12
   k = 200 · 6 bulan = 1200
   tentukan jumlah pesanan agar total biaya persediaan minimum,

$$Q = \sqrt{(2 \cdot sc \cdot D)/cc \cdot [1 - (D/K)]}$$
$$= \sqrt{(2 \cdot 0{,}5 \cdot 1000)/12 \cdot [1 - (1000/1200)]}$$
$$= \sqrt{\frac{1000}{12[1 - (1000/1200)]}} = 10\sqrt{5}$$

   dengan demikian diperoleh biaya persediaan totalnya,

$$C = \frac{1}{2}cc \ \cdot Q \cdot (1 - \frac{D}{k}) + \frac{sc \cdot D}{Q}$$
$$C = \frac{1}{2}12 \ \cdot 10\sqrt{5} \cdot (1 - \frac{1000}{1200}) + \frac{0{,}5 \cdot 1000}{10\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}$$
$$C = 44{,}72$$

   dengan demikian, jumlah pesanan bahan baku agar biaya persediaan totalnya menjadi minimum adalah $10\sqrt{5}$ tiap semester dengan biaya persediaan totalnya sebesar 44,72.

D. Biaya dan Penerimaan Total, Rata-rata, dan Marjinal

Biaya merupakan sejumlah pengeluaran yang digunakan untuk memproduksi barang atau jasa, dan belum memperhitungkan nilai untuk keuntungan. Bila biaya total (C) merupakan fungsi dari produksi barang (Q), maka fungsi biaya total dituliskan sebagai C = f(Q).

1. Biaya rata-rata

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

2. Biaya marjinal

$$MC = \frac{dC}{dQ}$$

Sebagai contoh, biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dinyatakan oleh fungsi $C = f(Q) = Q^2 - 30Q + 400$. Tentukan biaya rata-rata minimumnya dan biaya marginalnya pada saat biaya rata-ratanya minimum.

Penyelesaian biaya rata-rata minimumnya dimulai dengan persamaan

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{Q^2 - 30Q + 400}{Q} = Q - 30 + \frac{400}{Q}$$

nilai AC akan minimum dengan syarat diferensial pertamanya bernilai nol dan deferensial keduanya lebih dari nol.

1. AC' = 0

$$AC = Q - 50 + \frac{400}{Q}$$

$$AC' = 1 - \frac{400}{Q^2} = 0$$

$$\frac{400}{Q^2} = 1$$

$$Q^2 = 400$$

$$Q = 20$$

Untuk akar Q = - 20 tidak bermakna untuk kuantitas.

2. AC" > 0

$$AC' = 1 - \frac{400}{Q^2}$$

$$AC'' = \frac{800}{Q^3}$$

Sehingga dengan nilai Q = 20 diperoleh

$$AC'' = \frac{400}{(20)^3} = \frac{400}{8000} = 0{,}05$$

Dengan AC" > 0 kedua syarat terpenuhi.

Nilai AC adalah

$$AC = Q - 30 + \frac{400}{Q} = 20 - 30 + \frac{400}{20} = 20 - 30 + 20 = 10$$

Sedangkan untuk biaya marjinalnya pada Q = 20,

$$MC = \frac{dC}{dQ} = 2Q - 30 = 2(20) - 30 = 10$$

Penerimaan adalah jumlah pendapatan yang diperoleh dari penjualan barang atau jasa sebagai operasi utama perusahaan. Bila harga berupakan fungsi dari permintaan barang P = $f(Q_d)$, maka untuk penerimaannya dituliskan sebagai berikut,

1. Penerimaan total
   $$R = Q_d \cdot P = Q_d\, f(Q_d)$$

2. Penerimaan rata-rata
   $$AR = \frac{R}{Q_d} = \frac{Q_d\, f(Q_d)}{Q_d} = f(Q_d) = P$$

3. Penerimaan marjinal
   $$MR = \frac{dR}{dQ_d} = AR(1 + \frac{1}{\eta_d})$$

Sebagai contoh, sebuah produsen memiliki fungsi permintaan atas barang produknya mengikuti fungsi $Q_d = 6 - 0{,}36P$. Tentukanlah penerimaan total, penerimaan rata-rata dan penerimaan marjinalnya dengan P = 10.

Untuk menyelesaikan penerimaan total, tentukan nilai Q_d pada P = 10,

$$Q_d = 6 - 0{,}36(10) = 6 - 3{,}6 = 2{,}4$$
$$R = Q_d \cdot P = 2{,}4 \cdot 10 = 24$$

Penerimaan rata-ratanya adalah

$$AR = \frac{R}{Q_d} = \frac{Q_d\, f(Q_d)}{Q_d} = f(Q_d) = P = 10$$

Untuk penerimaan marjinalnya, fungsi permintaan diubah menjadi fungsi harga,

$$P \;=\; (6 - Q_d)/\ 0{,}36$$
$$R = Q_d \cdot P = Q_d(6 - Q_d)/\ 0{,}36$$
$$R = (6Q_d - Q_d^2)/0{,}36$$

sehingga untuk MR menjadi,

$$MR = \frac{dR}{dQ_d} = \frac{d((6Q_d - Q_d^2)/0{,}36)}{dQ_d} = \frac{1}{0{,}36}(6 - 2Q_d)$$

Nilai MR pada $Q_d = 2{,}4$ diperoleh

$$MR = \frac{1}{0{,}36}(6 - 2(2{,}4)) = \frac{1{,}2}{0{,}36} = 3{,}33$$

E. Elastisitas Permintaan Parsial dan Fungsi Produksi

Elastisitas permintaan parsial terkait bagaimana respon elastisitas terhadap barang substitusi atau komplementer. Fungsi permintaan untuk hal ini dinyatakan dalam bentuk fungsi multivariabel,

$$Q_0 = \mathrm{f}(P_0, P_1)$$

dengan Q_0 merupakan jumlah permintaan untuk barang yang diminta, dengan harga per unitnya P_0, dan P_1 menyatakan harga per unit barang lain yang penggunaannya berhubungan dengan barang yang diminta. Elastisitas permintaan parsial juga dapat membahas mengenai elastisitas permintaan terhadap harga, elastisitas permintaan terhadap pendapatan dan elastisitas permintaan silang. Seperti telah diketahui untuk elastisitas permintaan terhadap harga ditulikan sebagai berikut,

$$\eta_d = \frac{P_d}{Q_d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

untuk elastisitas permintaan parsialnya adalah,

$$\eta_{d0} = \frac{P_{d0}}{Q_{d0}} \frac{\partial Q_0}{\partial P_0}$$

sedangkan untuk elastisitas permintaan parsial silangnya

$$\eta_{d01} = \frac{P_{d1}}{Q_{d0}} \frac{\partial Q_0}{\partial P_1}$$

Dari elastisitas permintaaan parsial silangnya dapat ditinjau karakteristik bila nilai η_{d01} dan $\frac{\partial Q_0}{\partial P_1}$ bernilai negatif, maka kedua barang tersebut bersifat saling melengkapi atau komplementer. Bila nilai η_{d01} dan $\frac{\partial Q_0}{\partial P_1}$ bernilai positif, maka kedua barang tersebut dapat bersifat kompetitif atau subtitutif. Hubungan yang kedua barang bersifat independent atau tidak ada hubungan bila nilai $\frac{\partial Q_0}{\partial P_1} = 0$.

Sebagai contoh, tentukan elastisitas permintaan parsial terhadap harga, dan elastisitas permintaan parsial silang yang diberikan oleh fungsi

$$Q_0 = 1500 - 4P_0 + 5P_1$$

pada $P_0 = 125$, dan $P_1 = 150$.

Untuk menjawab persoalan elastisitas permintaan parsial terhadap harga, pertama hitung nilai Q_0 pada $P_0 = 125$, dan $P_1 = 150$ menjadi,

$$Q_0 = 1500 - 4(125) + 5(150)$$

$$Q_0 = 1500 - 500 + 750 = 1750$$

Berikutnya adalah menentukan turunan parsial dari Q_0 terhadap P_0

$$\frac{\partial Q_0}{\partial P_0} = -4$$

Selanjutnya untuk menentukan elastisitas permintaan parsialnya dihitung dari

$$\eta_{d0} = \frac{P_{d0}}{Q_{d0}} \frac{\partial Q_0}{\partial P_0}$$

$$\eta_{d0} = \frac{125}{1750}(-4) = -0{,}286$$

Nilai elastisitas permintaan parsial yang diperoleh menunjukan kenaikan harga barang P_0 naik 1% akan mengakibatkan penurunan permintaannya sebesar 0,286% dengan asumsi harga barang P_1 tetap. Untuk menjawab elastisitas permintaan parsial silang, yang perlu dilakukan adalah menentukan turunan parsial dari Q_0 terhadap P_1,

$$\frac{\partial Q_0}{\partial P_1} = 5$$

kemudian berikutnya elastisitas permintaan silangnya ditentukan dengan,

$$\eta_{d01} = \frac{P_{d1}}{Q_{d0}} \frac{\partial Q_0}{\partial P_1}$$

$$\eta_{d01} = \frac{150}{1750}(5) = 0{,}429$$

Nilai elastisitas η_{d01}= 0,429 yang menunjukan bila terjadi kenaikan harga barang P_1 sebesar 1%, maka terjadi peningkatan permintaan barang Q_0 sebesar 0,429% dengan asumsi harga P_0 tetap. Hubungan dari nilai η_{d01} dan $\frac{\partial Q_0}{\partial P_1}$ yang bernilai positif menunjukan hubungan kedua barang tersebut adalah kompetitif atau substitutif.

Fungsi produksi merupakan suatu model persamaan matematis yang menggambarkan produksi dengan melihat hubungan antara input dan outputnya. Penggambaran fungsi produksi dengan output (Q) dengan input modal (K) dan tenaga kerja (L) dituliskan sebagai,

$$Q = f(K, L)$$

Untuk fungsi produksi sederhana dapat dituliskan sebagai,

$$Q = K + L$$

Berikut ini beberapa jenis fungsi produksi, yaitu:

1. Cobb-Douglas

   Fungsi produksi ini merupakan fungsi yang klasik. Modal dan tenaga kerja sebagai faktor inputnya dengan keluaran dengan asumsu produktivitas (A). Persamaan fungsi produksi dituliskan sebagai,

   $$Q = AK^{a} L^{b}$$

   Variabel a dan b merupakan elastisitas output untuk K dan L.

2. Leontief

   Fungsi produksi ini menggunakan proporsi inputnya yang selalu tetap dan faktor dalam inputnya tidak saling substitusi. Bila modal dan tenaga kerja sebagai input, maka fungsi produksi dituliskan sebagai,

   $$Q = min\,(aK, bL)$$

3. Substitusi Konstanta Elastisitas (CES)

   Persamaannya dituliskan sebagai berikut,

   $$Q = A\,[aK^{\beta} + (1 - a)\,L^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

   atau,

   $$Q = A\,[aL^{-\beta} + (1 - a)\,K^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

   Parameter β merupakan derajat subsitusi dari input. Nilai dari parameter ini kurang dari atau sama dengan 1, dan memiliki nilai ekstrim pada saat bernilai 1 dan $-\infty$. Derajat homogenitas persamaan ini adalah 1 yang menunjukkan bahwa output akan meningkat seiring dengan meningkat inputnya.

Untuk menghitung produksinya terdiri atas,

1. Produksi total.

   $$TP = f(K, L)$$

   TP adalah total produksi, K adalah modal dan L adalah tenaga kerja. TP akan bernilai maksimal bila diferensial pertamanya bernilai nol. Dimana diferensial pertama dari TP merupakan produksi marjinal (MP).

2. Produksi rata-rata.

   Produksi rata-rata terhadap tenaga kerja dituliskan dengan,

$$AP = \frac{TP}{L}$$

   AP adalah produksi rata-rata. AP akan bernilai maksimum pada saat nilainya sama dengan MP.

3. Produksi marjinal.

   Produksi marjinal merupakan output tambahan yang dapat dihasilkan dari satu unit tambahan input dengan faktor lainnya bernilai tatap. Berikut ini adalah produksi marjinal terhadap tenaga kerja

$$MP_L = \frac{\partial TP}{\partial L}$$

BAB IX
FUNGSI DUA VARIABEL BEBAS DALAM EKONOMI

A. Perusahaan dengan Beberapa Produk dan Diskriminasi Harga

1. Perusahaan dengan Beberapa Produk

Perusahaan dengan beberapa produk (multiproduk) adalah perusahaan yang memproduksi beberapa produk. Salah satu permasalahan yang dihadapi oleh perusahaan multiproduk adalah adanya persaingan sempurna dalam sebuah pasar, dimana jumlah penjual dan pembeli (konsumen) sangat banyak dan produk atau barang yang ditawarkan atau dijual sejenis atau serupa. Contohnya pasar penjualan beras, gandum, dan wortel. Pada pasar dengan persaingan sempurna ini, penjual dan pembeli tidak dapat mempengaruhi harga sehingga harga di pasar benar-benar merupakan hasil kesepakatan dan interaksi antara penawaran dan permintaan.

Berikut ini adalah satu contoh tentang permasalahan perusahaan multiproduk.

Contoh 10.1:

Sebuah perusahaan dengan dua produk yang ada di pasar dalam keadaan persaingan sempurna. Misalkan produk pertama adalah x_1 dan produk kedua adalah x_2. Harga produk pertama adalah $P_{x_1} = 12$ dan harga produk kedua adalah $P_{x_2} = 18$. Tentukan nilai optimum kuantitas dari kedua produk ($Q^*_{x_1}$ dan $Q^*_{x_2}$) yang memaksimalkan keuntungan π^*.

Penyelesaian:

Misalkan Q_{x_1} adalah tingkat output produk pertama dan Q_{x_2} adalah tingkat output produk kedua maka fungsi pendapatan perusahaan adalah

$$R = P_{x_1}Q_{x_1} + P_{x_2}Q_{x_2}$$

dan fungsi biaya perusahaan adalah

$$C = 2{Q_{x_1}}^2 + Q_{x_1}Q_{x_2} + 2{Q_{x_2}}^2.$$

Dengan demikian fungsi keuntungannya adalah

$$\pi = R - C = (P_{x_1}Q_{x_1} + P_{x_2}Q_{x_2}) - (2{Q_{x_1}}^2 + Q_{x_1}Q_{x_2} + 2{Q_{x_2}}^2),$$

dimana turunan pertamanya terhadap tingkat output kedua produk adalah

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_{x_1}} = P_{x_1} - 4Q_{x_1} - Q_{x_2} = 0 \text{ dan } \frac{\partial\pi}{\partial Q_{x_2}} = P_{x_2} - Q_{x_1} - 4Q_{x_2} = 0.$$

Kedua persamaan ini, dapat dituliskan dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{x_1} \\ Q_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{x_1} \\ -P_{x_2} \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -P_{x_1} \\ -P_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{x_1} \\ Q_{x_2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya kita dapat menentukan $Q^*_{x_1}$ dan $Q^*_{x_2}$. Kita peroleh

$$Q^*_{x_1} = \frac{4P_{x_1} - P_{x_2}}{15} \text{ dan } Q^*_{x_2} = \frac{4P_{x_2} - P_{x_1}}{15}.$$

Sehingga,

$$Q^*_{x_1} = \frac{4(12) - (18)}{15} = 2, \qquad Q^*_{x_2} = \frac{4(18) - (12)}{15} = 4,$$

$$\begin{aligned} \pi^* &= R - C \\ &= (P_{x_1}Q^*_{x_1} + P_{x_2}Q^*_{x_2}) - (2{Q^*_{x_1}}^2 + Q^*_{x_1}Q^*_{x_2} \\ &\quad + 2{Q^*_{x_2}}^2) \\ &= \big((12)(2) + (18)(4)\big) \\ &\quad - (2(2)^2 + (2)(4) + 2(4)^2) \\ &= 48 \end{aligned}$$

Pengujian titik ekstrim : matriks Hessian $H = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.
$|H| = \big((-4)(-4)\big) - \big((-1)(-1)\big) = 16 - 1 = 15 > 0$ jika $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_1}^2} = -4 < 0$ (definit negatif) maka π^* adalah maksimum.

2. Diskriminasi Harga

Jika perusahaan monopolistik menjual satu jenis produknya pada dua atau lebih pasar yang terpisah, maka harus ditentukan jumlah output Q yang ditawarkan ke masing-masing pasar agar keuntungan menjadi maksimum.

Pada umumnya, setiap pasar mempunyai kondisi permintaan yang berbeda, dan bila elastisitas permintaan berbeda dalam berbagai pasar, maksimasi keuntungan memerlukan praktik diskriminasi harga. Diskriminasi harga adalah suatu praktik bisnis yang menjual produk sejenis dengan mengenakan harga yang berbeda untuk pelanggan yang berbeda.

Contoh 10.2:
Sebuah perusahaan monopolistik memproduksi dua produk, x_1 dan x_2. Fungsi permintaan untuk produk pertama dan produk kedua berturut-turut adalah

$$D_{x_1}: \quad P_{x_1} = 36 - 3Q_{x_1}$$
$$D_{x_2}: \quad P_{x_2} = 40 - 5Q_{x_2}$$

Dengan fungsi total biayanya adalah

$$C = {Q_{x_1}}^2 + 2Q_1Q_{x_2} + 3{Q_{x_2}}^2$$

Tentukan:

a. kuantitas dan harga dari masing-masing produk untuk memaksimumkan keuntungan.
b. keuntungan maksimum.

Penyelesaian:

a. $$\pi = Total\ pendapatan - Total\ biaya$$
$$= \left(P_{x_1}Q_{x_1} + P_{x_2}Q_{x_2}\right) - C$$
$$= \left(\left(36 - 3Q_{x_1}\right)Q_{x_1} + \left(40 - 5Q_{x_2}\right)Q_{x_2}\right) - ({Q_{x_1}}^2 + 2Q_{x_1}Q_{x_2} + 3{Q_{x_2}}^2)$$
$$= \left(\left(36Q_{x_1} - 3{Q_{x_1}}^2\right) + \left(40Q_{x_2} - 5{Q_{x_2}}^2\right)\right) - ({Q_{x_1}}^2 + 2Q_{x_1}Q_{x_2} + 3{Q_{x_2}}^2$$
$$= 36Q_{x_1} - 4{Q_{x_1}}^2 + 40Q_{x_2} - 8{Q_{x_2}}^2 - 2Q_{x_1}Q_{x_2}$$

Turunan pertama π terhadap Q_{x_1} dan Q_{x_2} berturut-turut adalah
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_{x_1}} = 36 - 8Q_{x_1} - 2Q_{x_2} = 0$$
dan
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_{x_2}} = 40 - 16Q_{x_2} - 2Q_{x_1} = 0.$$

Dari dua persamaan tersebut, kita peroleh $Q_{x_1} = 4$ dan $Q_{x_2} = 2$.
Harga produk pertama : $P_{x_1} = 36 - 3(4) = 36 - 12 = 24.$
Harga produk kedua : $P_{x_2} = 40 - 5(2) = 40 - 10 = 30.$

b. Keuntungan maksimum: $\pi^* = 36(4) - 4(4)^2 + 40(2) - 8(2)^2 - 2(4)(2) = 112.$

Untuk menentukan maksimum atau minimum, gunakan turunan kedua

Matriks Hessian $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_1}^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_1} \partial Q_{x_2}} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_2} \partial Q_{x_1}} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_2}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}.$

$|H| = \big((-8)(-16)\big) - \big((-2)(-2)\big) = 128 - 4 = 124 > 0$

jika $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{x_1}^2} = -8 < 0.$ (definit negatif) maka π^* adalah maksimum.

B. Produksi dengan Dua Input dan Memaksimalkan Utilitas

Utilitas (*utility*) adalah tingkat kepuasan tertentu yang diperoleh seorang konsumen dari mengkonsumsi sejumlah barang-barang tertentu. Utilitas total (*total utility*) adalah kepuasan total dalam mengkonsumsi sejumlah barang dan jasa. Selain itu ada juga istilah utilitas marginal (*marginal utility*) yaitu tambahan kepuasan yang diperoleh dalam menambah satu satuan barang yang dikonsumsi. Utilitas marginal menunjukkan utilitas tambahan yang diperoleh dari suatu unit tambahan konsumsi dari suatu barang.

Jika $x_1, x_2, ..., x_n$ menunjukkan barang-barang yang dikonsumsi oleh konsumen, maka fungsi utilitasnya adalah $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Seorang konsumen akan memaksimalkan utilitasnya, jika

1. perbandingan utilitas marginal berbagai barang tersebut adalah sama dengan perbandingan harga-harga barang tersebut.
2. utilitas marginal untuk setiap nilai mata uang yang dikeluarkan adalah sama untuk setiap barang yang dikonsumsikan.

Untuk mencapai utilitas maksimum dari suatu barang maka harus dipenuhi syarat keseimbangan.

Syarat memperoleh utilitas maksimum adalah

Fungsi tujuan : $\frac{U_{x_1}^m}{P_{x_1}} = \frac{U_{x_2}^m}{P_{x_2}} = \cdots = \frac{U_{x_n}^m}{P_{x_n}}$

Pendapatan untuk memaksimumkan kepuasan (y):

$$P_{x_1} Q_{x_1} + P_{x_2} Q_{x_2} + \cdots + P_{x_n} Q_{x_n} = y.$$

dimana untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$:

$U_{x_i}^m$ adalah utilitas marginal untuk barang x_i,

P_{x_i} adalah harga barang x_i, dan

Q_{x_i} adalah kuantitas atau jumlah barang x_i.

Contoh 10.3:
Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis barang yaitu x_1 dan x_2. Harga barang x_1 (P_{x_1}) adalah 2 dan harga barang x_2 (P_{x_2}) adalah 1. Utilitas marginal dari konsumen untuk kedua jenis barang tersebut, digambarkan dalam tabel berikut ini.

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_{x_1}^m$	44	40	36	32	28	**24**	20	16	12
$U_{x_2}^m$	14	13	**12**	11	10	9	8	7	6

Tentukan utilitas total dari konsumen tersebut.
Penyelesaian:
Syarat memperoleh utilitas maksimum : $\frac{U_{x_1}^m}{P_{x_1}} = \frac{U_{x_2}^m}{P_{x_2}}$.

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{U_{x_1}^m}{P_{x_1}}$	22	20	18	16	14	**12**	10	8	6
$\frac{U_{x_2}^m}{P_{x_2}}$	14	13	**12**	11	10	9	8	7	6

Utilitas maksimum ketika $\frac{U_{x_1}^m}{P_{x_1}} = \frac{U_{x_2}^m}{P_{x_2}}$ diperoleh pertama kali (terbesar). Pada tabel di atas, diperoleh utilitas maksimum yaitu $\frac{U_{x_1}^m}{P_{x_1}} = \frac{U_{x_2}^m}{P_{x_2}} = 12$ (ketika $Q_{x_1} = 6$ dan $Q_{x_2} = 3$).

Pendapatan yang diperoleh ketika utilitas maksimum :

$$y = P_{x_1}Q_{x_1} + P_{x_2}Q_{x_2} = (2 \,.\, 6) + (1 \,.\, 3) = 12 + 3 = 15.$$

Utilitas total $= U_{x_1}^m\, Q_{x_1} + U_{x_2}^m\, Q_{x_2} = (24 \,.\, 6) + (12 \,.\, 3) = 144 + 36 = 180.$

C. Fungsi Konsumsi dan Tabungan

1. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi adalah fungsi yang menunjukkan hubungan antara konsumsi dengan pendapatan. Konsumsi (c) dan tabungan (s) dinyatakan sebagai fungsi pendapatan (y),

$$y = c + s.$$

Semakin besar pendapatan maka semakin besar pula tingkat konsumsinya. Demikian pula, semakin tinggi pendapatan maka semakin besar pula tabungannya.

Diasumsikan bentuk umum dari fungsi konsumsi adalah persamaan linear berikut:

$$c = f(y) = a + b_c y,$$

dimana:

a adalah besar pengeluaran konsumsi saat pendapatan sama dengan nol,

b_c adalah MPC (marginal propensity to consume) atau besar tambahan konsumsi karena tambahan pendapatan.

a dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

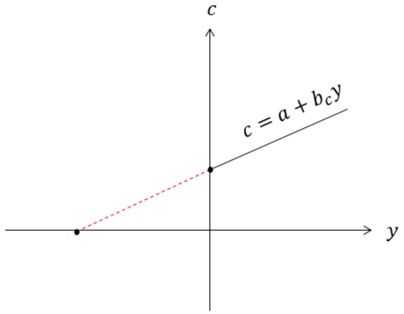
$$a = (APC - MPC)y,$$

Dimana APC (average propensity to consume) adalah perbandingan antara besarnya tingkat konsumsi dengan besarnya tingkat pendapatan.

$$APC = \frac{c}{y}.$$

b_c atau MPC dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

$$b_c = MPC = \frac{\Delta c}{\Delta y}.$$



Gambar 10.1 Kurva Fungsi Konsumsi

Contoh 10.4:
Pada tingkat pendapatan Rp. 1.000.000, besar konsumsinya adalah Rp. 800.000, sedangkan pada tingkat pendapatan Rp. 2.000.000 besar konsumsinya Rp. 1.200.000. Tentukan fungsi konsumsi dan gambarkan grafik fungsinya.

Penyelesaian:
Diketahui: y_1 = 1.000.000 dengan c_1 = 800.000.
y_2 = 2.000.000 dengan c_2 = 1.200.000.
Kita dapat menentukan fungsi konsumsi dengan menggunakan rumus persamaan garis yang melalui dua titik.

$$\frac{c - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{c - 800.000}{1.200.000 - 800.000} = \frac{y - 1.000.000}{2.000.000 - 1.00.000}$$

$$\frac{c - 800.000}{400.000} = \frac{y - 1.000.000}{1.000.000}$$

$$\frac{c - 800.000}{y - 1.000.000} = \frac{400.000}{1.000.000}$$

$$\frac{c - 800.000}{y - 1.000.000} = \frac{2}{5}$$

$$(c - 800.000)\,5 = (y - 1.000.000)2$$
$$5c - 4.000.000 = 2y - 2.000.000$$
$$5c = 2y + 2.000.000$$
$$c = 0{,}4y + 400.000$$

Jadi fungsi konsumsi adalah $c = 0{,}4y + 400.000$.

Gambar grafik fungsi $c = 0{,}4y + 400.000$.

a. Menentukan titik potong pada sumbu c, maka $y = 0$.

$$c = (0{,}4\,.\,0) + 400.000$$
$$c = 400.000$$

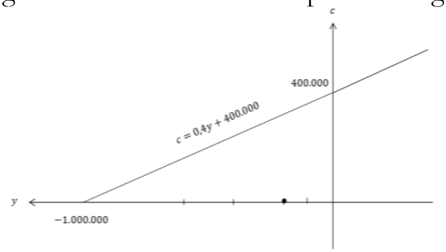
Titik koordinat: $(0, 400.000)$

b. Menentukan titik potong pada sumbu y, maka $c = 0$.

$$0 = 0{,}4\ y + 400.000$$
$$-0{,}4\ y = 400.000$$
$$y = \frac{400.000}{-0{,}4}$$
$$= -1.000.000$$

Titik koordinat : $(-1.000.000, 0)$

c. Menghubungkan kedua titik koordinat pada bidang cartesius.



2. Fungsi Tabungan

Tabungan atau *saving* merupakan bagian dari pendapatan yang tidak dikonsumsikan. Fungsi tabungan adalah fungsi yang menunjukkan hubungan antara tabungan (s) dengan pendapatan (y). Besarnya tabungan tergantung pada besarnya pendapatan.

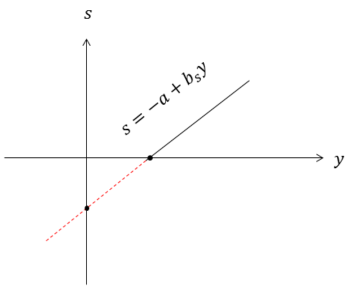
Dengan menggunakan hubungan pada fungsi konsumsi $(y = c + s)$, maka dapat ditulis bahwa

$$s = y - c.$$

Seperti yang telah dijelaskan pada fungsi konsumsi bahwa $c = a + b_c y$, maka dapat ditulis

$$s = y - (a + b_c y)$$
$$s = (1 - b_c)y - a.$$

Dengan $1 - b_c = b_s = MPS = \frac{\Delta s}{\Delta y}$ maka $s = b_s y - a$.



Gambar 10.2 Kurva Fungsi Tabungan

Contoh 10.5:
Nawir harus melakukan kegiatan konsumsi sebesar Rp. 20.000.000 meskipun pendapatannya nol. Dia tidak bisa menabung jika pendapatannya hanya Rp. 40.000.000. Tentukan fungsi tabungan dan gambar grafik fungsinya.

Penyelesaian:
Diketahui: a = 20.000.000 jika $y = 0$.
$s = 0$ jika $y = 40.000.000$.
Jika $y = 40.000.000$ dan $s = 0$ maka $c = 40.000.000$.
Sebelum menentukan fungsi tabungan, kita gunakan formula fungsi konsumsi untuk menentukan b_c.

$$c = f(y) = a + b_c y$$
$$40.000.000 = 20.000.000 + b_c\ 40.000.000$$
$$40.000.000 - 20.000.000 = b_c\ 40.000.000$$
$$20.000.000 = b_c\ 40.000.000$$
$$b_c = \frac{20.000.000}{40.000.000}$$
$$= 0{,}5.$$

Selanjutnya kita tentukan fungsi tabungan.

$$s = (1 - b_c)y - a$$
$$= (1 - 0{,}5)y - 20.000.000$$
$$= 0{,}5y - 20.000.000.$$

Jadi fungsi konsumsi adalah $s = 0{,}5y - 20.000.000.$
Gambar grafik fungsi $s = 0{,}5y - 20.000.000.$

a. Menentukan titik potong pada sumbu s, maka $y = 0.$

$$s = (0{,}5\ .\ 0) - 20.000.000$$
$$s = -20.000.000$$

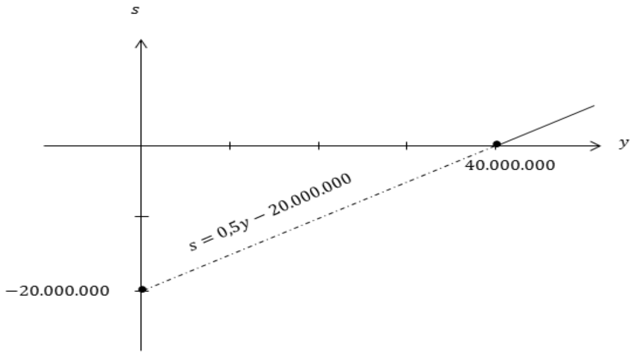
Titik koordinat : $(0, -20.000.000)$

b. Menentukan titik potong pada sumbu y, maka $s = 0.$

$$0 = 0{,}5y - 20.000.000$$
$$0{,}5\ \ y = 20.000.000$$
$$y = \frac{20.000.000}{0{,}5}$$
$$= 40.000.000$$

Titik koordinat: $(40.000.000, 0)$

c. Menghubungkan kedua titik koordinat pada bidang cartesius.



D. Investasi dan Pembentukan Modal

Proses pembentukan modal adalah proses persediaan modal. Fungsi pembentukan modal atau fungsi pembentukan kapital merupakan integral dari (aliran) investasi bersih (I) dan sebaliknya investasi bersih merupakan turunan pertama dari fungsi kapital.

$$K(t) = \int I(t)dt$$
$$K'(t) = I(t).$$

Dimana $K(t)$ adalah persediaan modal pada saat t, $K'(t)$ adalah *rate of capital formation* pada saat t, dan $I(t)$ adalah *net investment flow* pada saat t.

Total kapital pada interval waktu $[t_1, t_2]$ dapat dihitung melalui integral tentu berikut.

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)\ dt = K(t).$$

Contoh 10.6:

Diketahui fungsi investasi pada saat t, $I(t) = 3t^{1/2}$ dollar per tahun. Tentukan fungsi kapital pada interval $[9,16]$.

Penyelesaian:

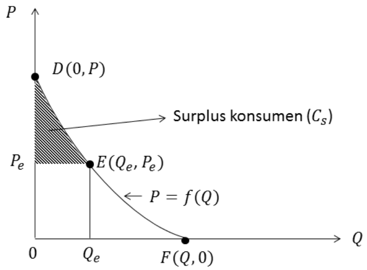
$$K(t) = \int_{9}^{16} 3t^{1/2}\ dt$$
$$= 2t^{3/2}|_{9}^{16}$$
$$= 2(16)^{3/2} - 2(9)^{3/2}$$
$$= (2 . 64) - (2 . 27)$$
$$= 128 - 54$$
$$= 74.$$

E. Kelebihan Konsumen dan Surplus Produsen

1. Kelebihan Konsumen

Kelebihan konsumen (*consumers surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Fungsi permintaan *P=f(Q)* menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. jika tingkat harga *P* maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari *P*, hal ini akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga *P*. Keuntungan lebih semacam inilah yang oleh *Alfred Marshal* disebut surplus konsumen. Secara geometri, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.



Gambar 10.3 Area Surplus Konsumen

Kelebihan konsumen (C_s) tidak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas atas.

a. Besarnya surplus konsumen untuk fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$ adalah:

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$$

b. Untuk fungsi permintaan yang berbentuk $Q = f(P)$, maka besarnya surplus konsumen adalah:

$$\int_{P_e}^{P} f(P)dP$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk *Q=f(P):* adalah nilai P untuk *Q = 0* atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga. Dengan demikian :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e = \int_{P_e}^{P} f(P)dP$$

Contoh 10.7:

Fungsi permintaan akan suatu barang adalah $Q = 75 - 0{,}03P^2$. Jika tingkat harga pasar barang tersebut adalah 40, tentukan besar surplus konsumen.

Penyelesaian:

Diketahui $Q = 75 - 0{,}03P^2$.

Jika $P = 0$ maka $Q = 75$.

Jika $Q = 0$ maka $P = 50$.

Jika tingkat harga pasar adalah 40 artinya $P_e = 40$, sehingga $Q_e = 75 - (0{,}03 \,.\, 40^2) = 27$.

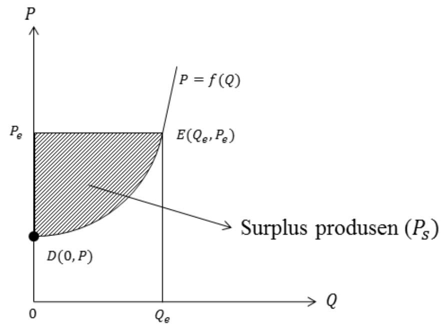
Selanjutnya kita menentukan surplus konsumen (C_s).

$$C_s = \int_{P_e}^{P} f(P)dP$$
$$= \int_{40}^{50} (75 - 0{,}03P^2)dP$$
$$= 75P - 0{,}01P^3 \mid_{40}^{50}$$
$$= [(75\,.\,50) - (0{,}01\,.\,50^3)] - [(75\,.\,40) - (0{,}01\,.\,40^3)]$$
$$= [3750 - 1250] - [3000 - 640]$$
$$= 2500 - 2360$$
$$= 140.$$

Jadi besarnya surplus konsumen adalah 140.

2. Surplus Produsen

Surplus produsen (*producers surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya.



Gambar 10.4 Area Surplus Konsumen

Surplus produsen (P_s) tidak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas atas.

Besarnya surplus produsen untuk fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$ adalah:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk *P=f(Q)I* atau

$$P_s = \int_P^{P_e} f(P)dP$$

Dalam hal fungsi penawaran terbentuk *Q=f(P)* adalah nilai *P* untuk *Q=0,* atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga.
Dengan demikian:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ = \int_P^{P_e} f(P)dP$$

Contoh 10.8:
Fungsi penawaran dari seorang produsen adalah $P = 0{,}4Q + 2$. Jika tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 16, tentukan besar surplus produsen.

Penyelesaian:
Diketahui $P = 0{,}4Q + 2$. Kita dapat merubah persamaan fungsi penawaran menjadi $Q = -5 + 2{,}5P$.
Jika $P = 0$ maka $Q = -5$.
Jika $Q = 0$ maka $P = 2$.
Jika $P_e = 16$ maka $Q_e = 35$.

Selanjutnya kita akan menentukan besar surplus produsen.
Cara I:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

$$= (35)(16) - \int_{0}^{35} (0{,}4Q + 2)dQ$$
$$= 560 - (0{,}2Q^2 + 2Q)\ |_0^{35})$$
$$= 560 - [(0{,}2\ .\ 35^2 + 2\ .\ 35) - 0]$$
$$= 560 - 315$$
$$= 245.$$

Cara II:

$$P_S = \int_{P}^{P_e} f(P)dP$$
$$= \int_{2}^{16} (-5 + 2{,}5P)dP$$
$$= (-5P + 1{,}25P^2)\ |_2^{16})$$
$$= [(-5\ .\ 16 + 1{,}25\ .\ 16^2) - (-5\ .\ 2 + 1{,}25\ .\ 2^2)]$$
$$= [(-80 + 320) - (-10 + 5)]$$
$$= 240 + 5$$
$$= 245.$$

Jadi besarnya surplus produsen adalah 245.

DAFTAR PUSTAKA

Adam, Malcolm R. (2007). *Sequences and Series: An Introduction to Mathematical Analysis*. [online]: Tersedia http://people.math.harvard.edu

Afidah, Khairunnisa. 2015. *Matematika Dasar*. Jakarta: Raja Grafindo Perkasa.

Amir Tjolleng. 2019. Matematika Ekonomi. Bandung: Yrama Widya

Bartle, G. Robert. (1982). *Introduction To Real Analyisis*. New York: John Wiley & Sons. Inc

Bawono, Anton dan Shina, Arya F.I. (2018). *Ekonometrika Terapan Untuk Ekonomi dan Bisnis Islam Aplikasi dengan Eviews*. Salatiga: Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat.

Bittinger, M. L., Ellenbogen, D. J. & Surgent, S. A. (2012). *Calculus and its applications*. Addison-Wesley

Bradley, Teresa. (2009). *Essential Mathematics for Economics and Business*. Edisi 3. New Delhi, India: John Wiley & Sons Ltd.

Case, E. Karl dan Ray C. Fair. (2002). *Principles of Economics*. Edisi 6. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Chiang, A.C., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Boston: McGraw-Hill.

Chiang, AC., dan K. Wainwriht. 2006. Dasar-dasar Matematika Ekonomi. Jakarta: Erlangga

Desmizar dan Iskandar, Kasir, *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis,* PT Rineka Press, Jakarta, 2003.

Firman, Muhammad, *Matematika Ekonomi dan Bisnis,* University of Indonesia.

Dowling, E. T. (2001). *Introduction to mathematical economics*. McGraw-Hill.

Drake, Pamela. P., Fabozzi, Fank. J. (2009). *Foundations and Applications of the Time Value of Money*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc

Dumairy. 1999. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi.*Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Dumairy, 2004. Matematika Terapan untuk Bisnis, BPFE-Yogyakarta

Dumairy. (2012). *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Edisi Kedua. Cetakan Kelima. Yogyakarta: BPFE.

Frank, H. Robert. (2010). *Microeconomics and Behavior*. Edisi 8. New York: McGraw Hill.

Habieb, Marno dan Aziz, Eddy, *Matematika Ekonomi & Bisnis,* Ghalia Indonesia, Bogor, 2004.

Kalangi, J. Bintang. (2015). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

Kalangi, Josep Bintang. (2012). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Edisi Kedua. Jakarta: Salemba Empat.

Karso. (2017). *Barisan dan Deret(Pembelajaran Matematika SMA).* FPMIPA UPI

Kieso, D. E., Weygandt, J. J., Warfield, T. D. (2018) *Intermediate Accounting: IFRS Edition.* Singapore: John Wiley & Sons, Inc

Jacques, I. (2006). *Mathematics for economics and business*. Pearson Education.

Jacques, Ian. (2009). *Mathematics for Economics and Business*. Edisi 6. Singapura: Prentice Hall.

Kennedy, P. S. J, *Modul Ekonomi Makro*: *Teori Perilaku Konsumen dengan Pendekatan Kardinal,* Universitas Kristen Indonesia, Jakarta, 2015.

N. Gregory Mankiw. 2004. *Principles of Economic*, 3rd Edition. Singapore: Cengage Learning Asia.

Newbold, P., Carlson, W. L., & Thorne, B. (2013). *Statistics for business and economics*. Boston, MA: Pearson.

Mairy, Du. (2003). *Matematika Terapan untuk Bisnis dan ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Mavron, Vassilis C., & Phillips, Timothy N. (2007). *Elements of Mathematics for Economics and Finance*. London: Springer.

Nachrowi, D.N. (2009). *Peranan Matematika Ekonomi dan Ekonometrika dalam Memahani Ekonomi*. Jurnal Ekonomi dan Pembangunan Indonesia, 9(2), 171-185.

Prasetyaman, Enggar, dkk, *Matematika Ekonomi,* UNPAM Press, Tangerang Selatan, 2019.

Puguh Suharso, 2014. Matematika Terapan Untuk Bisnis. Jakarta: Indeks

Rahardja, Prathama dan Manurung, Mandala. (2008). *Pengantar Ilmu Ekonomi (Mikroekonomi & Makroekonomi) Edisi Ketiga*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Robert S. Pindyck and Daniel L. 2005. Rubinfeld, *Microeconomics*. Sixth Edition. New Jersey: Pearson Prentice Hall

Rosser, M. & Lis, P. (2016). *Basic mathematics for economists*. Routledge.

Samuelson dan Nordhaus. 2004. *'Ilmu Makro Ekonmi*. Jakarta: PT. Media Global Edukasi

Sofyan Assauri. 2000. *Matematika Ekonomi*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Subanti, Sri, *Matematika Ekonomi,* UNS Press, Surakarta, 2015.

Sukirman. 2006. *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Supangat, Andi. (2006). *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Kencana

Suyitno, Hardi. (2014). *Pengenalan Filsafat Matematika*. Semarang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Sydsaeter, K., dan P. Hammond. 2012. *Esseantial Mathematics For Ekonomic Analysis*. Fourth Edition. London: Pearson Education

Tahyudin, Imam, *Matematika Bisnis Teori & Terapan,* Zahra Media Publisher.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. 2007. *Calculus*. USA: Pearson Education.

Wahyudin & Sudrajat. 2003. *Ensiklopedi Matematika untuk SLTP*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

Weber, J.D., 1976. *Mathematical Analysis Business & Economic Aplication*, Harper & Row, Publisher, Inc.

Werner, F., & Sotskov, Y. N. (2006). *Mathematics of economics and business*. Taylor & Francis.

Wirawan, Nata, *Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi dan Bisnis*, Keraras Emas, Denpasar, 2017.

BIOGRAFI PENULIS

Ahmad Faridh Ricky Fahmy, M.Pd., lulus S1 Pendidikan Matematika di UIN Walisongo Semarang tahun 2014. Lulus S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Semarang (UNNES) tahun 2019. Sejak lulus S1 telah berkecimpung di dunia pendidikan dan pernah menjabat sebagai ketua Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) Madrasah Tsanawiyah se-Kota Semarang. Pada tahun 2021 menjadi dosen di jurusan Tadris Matematika Fakultas Tarbiah dan Ilmu Keguruan Institut Agama Islam Negeri Pekalongan.

Rusdin, S.Si., M.Si., lahir di Ambon, 11 Juni 1984. Saat ini berdomisili di Kota Sorong, Papua Barat. Pendidikan SD hingga SMA diselesaikan di Raha, kabupaten Muna, Sulawesi Tenggara. Pendidikan S1 dan S2 Matematika diselesaikan di Universitas Hasanuddin Makassar pada tahun 2008 dan 2013. Pengalaman Mengajar sebagai guru dan Pembina Olimpiade Matematika di Pesantren Modern Pendidikan Al-Quran IMMIM Putra Makassar (2009-2015), Guru Matematika Bosowa International School Makassar (2013-2014). Sebagai Dosen tetap di STAIN Sorong (sekarang IAIN Sorong) sejak 2015 hingga sekarang. Mengampuh mata kuliah matematika ekonomi pada program studi Ekonomi Syariah dan mata kuliah matematika (Bilangan dan Aljabar, Pengukuran dan Geometri, Pembelajaran Matematika) pada Program Studi Pendidikan Guru Madrasah Ibtidaiyah.

Ilmadi, Alumnus Program Pasca Sarjana Universitas Negeri Padang Jurusan Magister Pendidikan Matematika Tahun 2014. Telah berkecimpung di dunia Pendidikan sejak Tahun 2010 Setelah menyelesaikan Strata 1. Pada Tahun 2015 menjadi dosen Tetap di Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan (STKIP) Kep. Meranti Propinsi Riau, dan di tahun 2017 pindah ke Universitas Pamulang, dan sampai saat ini, aktif mengajar di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pamulang". Selain "aktif mengajar penulis juga aktif melakukan kegiatan Penelitian, baik yang dilakukan dengan tim dosen maupun berkolaborasi dengan mahasiswa. Adapun karya buku yang pernah diterbitkan sebelumnya yaitu Buku Praktikum Statistik Elementer, Aljabar Abstrak Lanjutan, *Forcasting the ekpsponential smoothing methods*, Model PBI sebagai salah satu alternatif dalam melatih kemampuan matematis dan Pengantar Teori Bilangan. Beberapa karyanya berupa hasil penelitian atau Jurnal PKM juga pernah dimuat diberbagai Ojs yang terindeks Sinta dan Scopus. Saat ini selain mengajar Penulis juga mendapatkan tugas tambahan sebagai Koordinator SDM di Fakultas Teknik dan FMIPA Universitas Pamulang Banten.

Rani Rahim, S.Pd., M.Pd, Lahir di Palembang pada tanggal 22 Oktober 1990, merupakan putri kedua dari pasangan Purn. Serma Hamzani dan Syafrida. Menyelesaikan pendidikan S1 di Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU) pada program studi Pendidikan Matematika dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya pada tahun 2013, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang Magister Pendidikan (S2) di Program Pascasarjana

Universitas Negeri Medan (UNIMED) pada program studi Pendidikan Matematika dan lulus pada tahun 2015. Saat ini bertugas sebagai dosen di Universitas Dharmawangsa Medan, Sumatera Utara sejak tahun 2015 s/d sekarang. Selain sebagai dosen, penulis juga bertugas sebagai guru di SMK Negeri 5 Medan sejak tahun 2013 s/d sekarang. Penulis juga aktif melakukan penelitian dalam bidang pendidikan matematika, pengembangan perangkat pembelajaran, serta pendekatan kontekstual. Penulis juga pernah mendapatkan Hibah Penelitian Dosen Pemula (PDP) pada tahun 2019 sebagai ketua dan anggota. Selain aktif dalam bidang penelitian, penulis juga aktif dalam melakukan kegiatan pengabdian kepada masyarakat. Pada tahun 2020, penulis mendapatkan Hibah Program Kemitraan Masyarakat Stimulus (PKMS) yang diperoleh dari Hibah Kemenristek/Brin sebagai anggota. Alhamdulillah pada tahun 2021 ini, penulis diberi kesempatan kembali untuk memenangkan Hibah Penelitian Dosen Pemula (PDP) sebagai ketua. Buku ini merupakan buku kolaborasi pertama bagi penulis. Semoga buku ini dapat digunakan bagi dosen-dosen di seluruh Indonesia yang mengampu mata kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis, serta dapat memberikan manfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa dan juga dapat menjadi inspirasi bagi penulis lainnya. **E-mail:** ranirahim@dharmawangsa.ac.id

Namanya adalah **Fitri Kumala Dewi**, Lahir di Ladang Panjang, 02 Oktober 1992, ia adalah anak pertama dari tiga bersaudara, dari pasangan Sulaiman dan Jusmawati. Fitri adalah panggilan akrabnya, ia terlahir di keluarga yang sangat sederhana, Ayahnya seorang Guru PNS di sebuah Sekolah Dasar, dan Ibunya merupakan seorang ibu rumah tangga yang hebat. Dia menyelesaikan S1 di STKIP PGRI Sumatera Barat tahun 2014, pada program studi Pendidikan Matematika, kemudian melanjutkan ke jenjang Magister (S2) pada tahun 2017 di

Program Pascasarjana Universitas Negeri Malang dengan program studi yang sama yaitu Pendidikan Matematika. Saat ini bertugas sebagai dosen di kampus STAI MA'ARIF Sarolangun, Jambi. Selain itu dia juga bertugas sebagai guru di SMA N 7 Sarolangun. Fitri juga aktif dalam penelitian di bidang pendidikan dan matematika. Meskipun ini merupakan buku kolaborasi pertamanya, Fitri sangat bersungguh-sungguh dan menikmati saat menulis buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Dr. Jan Setiawan, S.Si., M.Si lahir di Jakarta pada tahun 1980. Saat ini penulis adalah staf di Pusat Teknologi Bahan Bakar Nuklir BATAN sebagai Peneliti Ahli Madya. Penulis menyelesaikan studi S1 di prodi Fisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2003. Tahun 2008, penulis berkesempatan melanjutkan studi S2 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia yang diselesaikan tahun 2010 melalui program beasiswa internal BATAN. Melalui beasiswa Kemenristek Dikti tahun 2012, penulis melanjutkan studi S3 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia dan menyelesaikannya ditahun 2015.

Bidang kepakaran Penulis adalah teknik material. Dalam karir sebagai peneliti selain membangun kompetensi kepakaran bidang teknik material, sejak tahun 2015 bergabung dalam kegiatan forensik nuklir. Penulis berkesempatan mengikuti MEXT *The Nuclear Researchers Exchange Program* tahun 2020 di Universitas Tokyo dengan tema *Materials Development of Nuclear Fuel Cladding* selama tiga bulan. Selain meneliti, penulis juga aktif menjadi pengajar dibeberapa Lembaga Pendidikan. Saat ini, penulis aktif mengajar di prodi Teknik Elektro Universitas Pamulang. Penulis juga aktif mengelola jurnal terakreditasi nasional sebagai *Chief in Editor* untuk Urania Jurnal Ilmiah Daur Bahan Bakar Nuklir Pusat Teknologi Bahan Bakar Nuklir BATAN dengan status akreditasi SINTA 2 dan *Journal Of Electrical Power, Instrumentation And Control* (EPIC) Prodi Teknik Elektro Universitas Pamulang, dengan status akreditasi SINTA 5, dan sebagai mitra bestari di beberapa jurnal baik nasional maupun internasional.

Djaffar Lessy adalah lulusan S1 pada program studi Matematika Universitas Hasanuddin Makassar tahun 2004. Menamatkan studi S2 Matematika di Institut Teknologi Bandung pada tahun 2012. Pada tahun 2020 meraih gelar Doktor Matematika dari Université Cote d'Azur (Perancis). Sejak tahun 2006 tercatat sebagai dosen tetap di program studi Pendidikan Matematika Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Ambon. Mata kuliah yang diampu antara lain: Matematika Ekonomi, Geometri Euclid, dan Geometri Analitik.