Abdillah._2013._Program_Linear-halaman-3,18-181.pdf

by

PROGRAM LINEAR

ISBN	: 978-602-1664-10-0
Jumlah Halaman	: 148, xxii
Ukuran Buku	: 15,5 cm x 23 cm
Penulis	: Abdillah, S.Si., S.Pd., M.Pd
Desain	: Ruslan
Ilustrasi	: Agussalim Pundu
Layout	: Muhammad Iqbal S
Diterbitkan Oleh	: DUA SATU PRESS
	Jl. Perintis Kemerdekaan 9 No. 5A Makassar
	Sulawesi-Selatan
	www.cv-21.com
Dicetak Oleh	: CV.21COM

Cetakan Pertama Desember 2013

Daftar Isi

Bab I

Pendahuluan

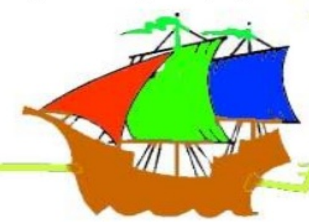
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Mengetahui sejarah program linear
- Menunjukkan beberapa persoalan yang dapat dipecahkan dengan program linear
- Mengetahui langkah-langkah dalam proses program linear



ٱلْحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَلَا تَكُن مِّنَ ٱلْمُمْتَرِينَ ٦٠

(Apa yang telah Kami ceritakan itu), itulah yang benar, yang datang dari Tuhanmu, karena itu janganlah kamu termasuk orang-orang yang ragu-ragu. (QS. 3. Al-Imran :60)

A. Sejarah Singkat Program Linear

Program linear ditemukan dan dikembangkan oleh beberapa matematikawan di masa sebelum Perang Dunia ke-II. Penemuan dan pengembangan oleh beberapa matematikawan tersebut rata – rata didasarkan karena persoalan atau masalah yang sedang berkembang saat itu, yaitu dalam hal industri dan peperangan. Beberapa matematikawan tersebut adalah Leonid V. Kartovich, George B. Dantzig, John von Neumann, Leonid Khachiyan dan Naranda Karmarkar. Berikut ini pemaparan sejarah penemuan program linear oleh beberapa matematikawan tersebut di atas.

1. Leonid Vitalevich Kartovich

Leonid V. Kartovich lahir pada bulan Januari tahun 1912 di kota Leningrad, Rusia. Leonid tumbuh menjadi seorang anak dengan rasa keingin tahuan yang besar, ia tertarik dengan politik dan sejarah modern. Pada usaianya yang baru 14 tahun, ia sudah masuk ke *Mathematical Department of the Leningrad University*, di sini ia mulai menyadari bahwa ia berminat pada bidang ilmu pengetahuan dan matematika. Pada tahun keduanya di universitas, Leonid sudah mengungguli teman – temannya di bidang matematika, bahkan ia sudah menguasai matematika kompleks dan abstrak. Di usianya yang ke 18 tahun ia sudah menjadi penulis di bidang matematika.

Setelah lulus, Leonid terus melanjutkan penelitiannya di bidang matematika teoritis, tetapi seiring berjalannya waktu ia mulai memindahkan konsentrasinya pada matematika terapan, pada ahirnya kontribusi terbesar Leonid adalah pada matematika ekonomi. Pada masa itu Uni Soviet sedang menghadapi masa industrialisasi di bawah wewenang Joseph Stalin dimana perekonomian yang semula terpusat pada pertanian berubah menjadi industri. Keadaan seperti inilah yang membuat Leonid menemukan masalah di tempat ia berkerja yaitu sebagai konsultan laboratorium pemerintah.

Persoalan tersebut berkaitan dengan kegiatan produksi, ia harus menyelesaikan masalah mengefisiensikan biaya produksi dan pemakaian bahan baku tetapi produksi tetap maksimal. Pada awalnya masalah ini dinilai sederhana, hanya sebuah kasus kalkulus diferensial, tetapi ternyata lebih rumit dari kelihatannya. Inilah hal yang menjadi awal keinginan Leonid untuk menggunakan matematika sebagai aplikasi untuk ekonomi. Akhirnya pada tahun 1939, Leonid mengajukan sebuah hasil pemikirannya berdasarkan masalah yang ada dan perencanaan solusinya. Ternyata hasil pemikirannya ini adalah yang kita kenal sekarang sebagai **Program Linear**. Pemikirannya tersebut pada awalnya diragukan oleh banyak orang, tetapi dengan cepat terbukti ketika ia menghitung jumlah maksimum suatu pabrik harus memakai baja agar biaya produksi tetap efisien, dan ternyata pemikirannya tersebut terbukti biaya produksi dapat diefisienkan secara signifikan.

Penemuan Leonid mengantarkan era baru bagi perekonomian bagi Uni Soviet. Hal ini menimbulkan minat yang besar bagi Uni Soviet dalam matematika terapan, dan sejak itu Leonid menjadi revolusioner di bidang ekonomi matematika.

وَلَوْ شِئْنَا لَرَفَعْنَٰهُ بِهَا وَلَٰكِنَّهُۥٓ أَخْلَدَ إِلَى ٱلْأَرْضِ وَٱتَّبَعَ
هَوَىٰهُ ۚ فَمَثَلُهُۥ كَمَثَلِ ٱلْكَلْبِ إِن تَحْمِلْ عَلَيْهِ يَلْهَثْ أَوْ تَتْرُكْهُ يَلْهَث ۚ
ذَّٰلِكَ مَثَلُ ٱلْقَوْمِ ٱلَّذِينَ كَذَّبُوا۟ بِـَٔايَٰتِنَا ۚ فَٱقْصُصِ ٱلْقَصَصَ لَعَلَّهُمْ
يَتَفَكَّرُونَ ﴿١٧٦﴾

Dan kalau Kami menghendaki, sesungguhnya Kami tinggikan (derajat) nya dengan ayat-ayat itu, tetapi dia cenderung kepada dunia dan menurutkan hawa nafsunya yang rendah, maka perumpamaannya seperti anjing jika kamu menghalaunya diulurkannya lidahnya dan jika kamu membiarkannya dia mengulurkan lidahnya (juga). Demikian itulah perumpamaan orang-orang yang mendustakan ayat-ayat Kami. Maka ceritakanlah (kepada mereka) kisah-kisah itu agar mereka berpikir. (QS. 7. Al-A'araaf :176)

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ
لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿١٣﴾

Dan Dia menundukkan untukmu apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berpikir. (QS. 45. Al-Jaatsiyah:13)

2. **George Bernard Dantzig**

George Bernard Dantzig lahir pada tanggal 8 November 1914 di Portland, Oragon, Amerika Serikat. Ayah Dantzig adalah seorang profesor matematika dan ibunya adalah seorang ahli bahasa Slavia. Dantzig mendapatkan gelar sarjananya di University of Maryland pada tahun 1936. Ia tidak suka semua mata kuliah matematik yang ia ambil di sana karena ia tidak melihat aplikasi dari semua itu. Tahun berikutnya ia mengambil program pasca sarjana di Mathematics School of the University of Michigan. Selain mata kuliah statistika, ia tetap melihat semua mata kuliah matematikanya terlalu abstrak maka ia meninggalkan sekolahnya dan mencari pekerjaan.

Lalu ia bekerja di Biro Statistik Tenaga Kerja, dua tahun kemudian ia berkuliah di Berkley untuk mengambil doktor dalam bidang statistika. Setelah mendapatkan gelar doktor pada tahun 1947 ia bergabung di Angkatan Udara Amerika sebagai penasehat matematik untuk pusat kontrol Angkatan Udara. Angkatan udara membutuhkan cara cepat untuk menghitung durasi tahapan program, latihan, dan distibusi logistik. Berasal dari sinilah pemikirian Dantzig tentang program linear. Dantzig menyatakan bahwa : "*I began noticing that the feasible regionis a convex body, that is, a polyhedral set.Therefore, the process would be able to be improved if the movements were maded along theborders from one extreme point toward the following. However, this procedure seemed to be too inefficient. In three dimensions, the regioncould be visualized like a* *diamond with faces, edges and vertex. In the cases of many borders, the process would take an a journey along them before the diamond's point optimal corner would be reached".*

Kesimpulannya, sebuah permasalahan dijadikan dalam bentuk 3 dimensi seperti berlian dimana ada tampak depan, garis pinggir dan puncak lalu mereka akan saling bertemu disuatu titik hingga titik optimum akan terpenuhi. Begitulah awal terciptanya program linear dengan metode simpleks oleh Dantzig.

3. John von Neumann,

Leonid Khachiyan dan **Naranda Karmarkar** mengembangkan program linear untuk masalah – masalah yang lebih rumit pada tahun – tahun berikutnya sampai di temukannya metode grafik[1].

B. Pengertian Program Linear

Ada beberapa pengertian Program Linear menurut para ahli, di antaranya:

1. *Siringoringo*

   Pemrograman Linier disingkat PL merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. PL banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, social dan lain-lain. PL berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu

[1] http://ismimathskanda.com/2012/02/09/sejarah-penemuan-dan-pengembangan-program-linear/

model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier.[2]

2. *Jaz Heizer dan Barry Rander*

   Linear programming menurut Jay Heizer dan Barry Rander mengemukakan bahwa:

   "*A mathematical technique designed to help operations managers plan and make decisions relative to the trade-offs necessary to allocate resources*"[3].

   Yang artinya :

   "Sebuah teknik matematik yang didesain untuk membantu para manajer operasi dalam merencanakan dan membuat keputusan yang diperlukan untuk mengalokasikan sumber daya".

3. *Tjutju Tarliah Dimyati dan Ahmad Dimyati*

   Menurut Tjutju Tarliah Dimyati dan Ahmad Dimyati mengemukakan bahwa "Program linier (LP) adalah perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik diantara seluruh alternatif yang fisibel"[4]

Secara umum Program Linear dapat diartikan bahwa suatu teknis matematika yang dirancang untuk membantu manajer dalam merencanakan dan membuat keputusan dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan perusahaan.

Secara khusus, persoalan program linear adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel (variabel pengambilan keputusan) sedemikian rupa sehingga nilai funsi tujuan atau objektif (objective function) yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan (kendala-kendala) yang ada yaitu

---

[2]Hotniar Siringoringo, Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. (Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu, 2005) hlm

[3]Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. (New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. 2014). Hlm 658

[4]Tjutju Tarliah Dimyati dan Ahmad Dimyati. 2003. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. (Bandung: Sinar Baru Algensindo). Hlm 17

14 pembatasan ini harus dinyatakan dengan ketidaksamaan yang linier (linear inequalities).

Pendapat pakar yang lain menyatakan bahwa linear programming adalah merupakan suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis yang analisis-analisisnya memakai model matematika, dengan tujuan untuk menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah, lalu dipilih yang terbaik dalam rangka menyusun strategi dan alokasi sumber daya dan dana untuk mencapai tujuan dan sasaran yang diinginkan secara optimal.

Secara singkat, program linear adalah teknik matematika yang dirancang untuk membantu manager dalam merencanakan dan membuat keputusan dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan perusahaan.

C. Asumsi-asumsi Dasar dalam Program Linear

19 Untuk membentuk suatu model program linear perlu diterapkan asumsi-asumsi dasar, yaitu:

1. Linearitas

   Fungsi obyektif dan kendala haruslah merupakan fungsi linier dan variabel keputusan. Hal ini akan mengakibatkan fungsi bersifat proporsional dan additif, misalnya untuk memproduksi 1 kursi dibutuhkan waktu 5 jam, maka untuk memproduksi 2 kursi dibutuhkan waktu 10 jam.
2. Pembagian

   Nilai variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan. Apabila diinginkan solusi berupa bilangan bulat (*integer*), aka harus digunakan metoda untuk integer programming.
3. Variabel non negatif

   Nilai variabel keputusan haruslah tidak negatif (≥ 0).

4. Kepastian

    Semua konstanta (parameter) diasumsikan mempunyai nilai yang pasti. Bila nilai-nilai parameternya probabilistik, maka harus digunakan formulasi pemrograman masalah stokastik.

Secara teknis, ada lima syarat tambahan dari permasalahan linear programming yang harus diperhatikan yang merupakan asumsi dasar, yaitu:

1. *Certainty (kepastian)*. Maksudnya adalah fungsi tujuan dan fungsi kendala sudah diketahui dengan pasti dan tidak berubah selama periode analisa.
2. *Proportionality (proporsionalitas)*. Yaitu adanya proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala.
3. *Additivity (penambahan)*. Artinya aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu.
4. *Divisibility (bisa dibagi-bagi)*. Maksudnya solusi tidak harus merupakan bilangan integer (bilangan bulat), tetapi bisa juga berupa pecahan.

    Non-negative variable (variabel tidak negatif). Artinya bahwa semua nilai jawaban atau variabel tidak negatif.

Untuk merumuskan suatu masalah ke dalam bentuk model program linear, harus dipenuhi syarat-syarat berikut:

1. Tujuan masalah harus jelas.
2. Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin dibandingkan.
3. Adanya sumber daya yang terbatas.
4. Bisa dilakukan perumusan kuantitatif.
5. Adanya keterkaitan peubah (variabel).

Program Linear memiliki empat ciri khusus yang melekat, yaitu :

1. Penyelesaian masalah mengarah pada pencapaian tujuan maksimisasi atau minimisasi
2. Kendala yang ada membatasi tingkat pencapaian tujuan
3. Ada beberapa alternatif penyelesaian
4. Hubungan matematis bersifat linear

D. Ruang Lingkup Program Linear

Pada umumnya persoalan-persoalan yang dipecahkan dalam program linear yaitu meliputi:

1. *Allocation Problem*

   Ini merupakan pemecahan dalam alokasi bahan-bahan/barang dalam produksi

2. *Blending Problem*

   Ini merupakan cara pemecahan persoalan dari berbagai bahan campuran yang masing-masing unit dipecahkan dan digabung (blending) untuk menghasilkan output.

3. Persoalan Transportasi

   Ini merupakan pemecahan persoalan yang menyangkut adanya unit/barang/pasokan dan lain-lain pada beberapa tempat yang akan dipindahkan ke beberapa tempat lainnya.

4. Persoalan Personil

   Ini merupakan penempatan personil sesuai dengan jabatan/tempatnya (*assigment problem*).

Suatu persoalan disebut persoalan program linear apabila memenuhi hal-hal sebagai berikut:

1. Tujuan (objective)

   Apa yang menjadi tujuan permasalahan yang dihadapi yang ingin dipecahkan dan dicari jalan keluarnya. Tujuan ini harus jelas dan tegas yang disebut fungsi tujuan (objective function). Fungsi tujuan tersebut dapat berupa dampak positip, manfaat-manfaat, atau dampak negatip, kerugian-kerugian, resiko-resiko, biaya-biaya, jarak, waktu yang ingin diminimumkan.

2. Alternatif perbandingan

   Harus ada sesuatu atau alternatif yang ingin diperbandingkan, misalnya antara kombinasi waktu tercepat dan biaya tertinggi dengan waktu terlambat dan biaya terendah, atau alternatif padat modal dengan padat karya, proyeksi permintaan tinggi dengan rendah, dan seterusnya.

3. Sumber Daya

Sumber daya yang dianalisis harus berada dalam keadaan terbatas. Misalnya keterbatasan tenaga, bahan mentah terbatas, modal terbatas, ruangan untuk menyimpan barang terbatas, dan lain-lain. Pembatasan harus dalam ketidaksamaan linier (linear inequality). Keterbatasan dalam sumber daya tersebut dinamakan sebagai fungsi kendala atau syarat ikatan.

4. Perumusan Kuantitatif

Fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan secara kuantitatif dalam model matematika.

5. Keterikatan Perubah

Perubah-perubah yang membentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala tersebut harus memiliki hubungan keterikatan hubungan keterikatan atau hubungan fungsional.

E. Bentuk Umum Program Linear

Pemrograman linear dapat dirumuskan seperti berikutmencari nilai-nilai peubah/variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memaksimumkan atau meminimumkan $Z = c_1x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_nx_n$ dengan kendala:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_2x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m
\end{aligned}
$$

Dengan syarat peubah/variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $c_i, i = 1,2, \ldots, n$, $a_{ij}, i = 1,2, \ldots, m$, $j = 1,2, \ldots, n$ adalah konstanta.

Penentuan kendala dilakukan dengan memilih satu di antara tiga tanda $\leq$ (kurang atau sama dengan), $=$ (sama dengan), $\geq$ (lebih atau sama dengan). Perumusan di atas dapat ditulis lebih ringkas sebagai berikut:

Mencari $x_j, j = 1,2, \ldots, n$ yang memaksimalkan atau meminimumkan

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

Sedemikian hingga

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ (\leq, =, \geq) b_i$$

$$, i = 1,2, \dots, m$$

Dengan syarat $x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$. Karena persoalan pemrograman linear merupakan masalah alokasi sumber daya, maka perumusan di atas dapat diinterpretasikan bahwa jika $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ adalah jumlah sumber daya ke-i yang harus dialokasikan pada setiap kegiatan/aktivitas ke-j. Sumbangan laba dari setiap kegiatan ke-j dinyatakan oleh konstanta c_j, j = 1,2, ..., n.[5]

[5] Muhammad Arif Tiro. Pengenalan Manajemen Sains. (Makassar: Andira Fublihser, 2004). Hlm 24.

Ringkasan

Program linear adalah teknik matematika yang dirancang untuk membantu manager dalam merencanakan dan membuat keputusan dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan perusahaan.

Syarat-syarat perumusan suatu masalah ke dalam bentuk model program linear: (1) Tujuan masalah harus jelas, (2) Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin dibandingkan, (3) Adanya sumber daya yang terbatas, (4) Bisa dilakukan perumusan kuantitatif, (5) Adanya keterkaitan peubah (variabel).

Latihan

1. Program linear sebagai metode ilmiah yang memungkinkan para manajer mengambil keputusan dengan dasar ...
2. Aplikasi program linear dalam berbagai bidang ditandai dengan...
3. Fungsi yang dicari solusi optimalnya disebut...
4. Batasan-batasan yang mempengaruhi persoalan terhadap tujuan yang akan dicapai disebut...
5. Fungsi pembatas pada model program linear disebut...

DAFTAR PUSTAKA

Al-*Qur'an*

Aminuddin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga.

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

http://ismimathskanda.com/2012/02/09/sejarah-penemuan-dan-pengembangan- program - linear/, artikel diakses tanggal 17 Oktober 2013.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. 2004.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab II

Matriks & Sistem Persamaan Linear

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Memahami lebih baik pengertian matriks yang berkaitan dengan pemecahan sistem persamaan linear
- Memahami lebih baik proses pemecahan sistem persamaan linear melalui eliminasi Gauss-Jordan
- Memahami proses pemecahan sistem persamaan, bila jumlah variabel tidak sama dengan jumlah persamaan (pemecahan dasar atau pemecahan basis)

MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

A. Pengertian Matriks

Hubungan antara variabel-variabel, baik di dalam ilmu ekonomi maupun di dalam ilmu lainnya, sering kali perlu diselesaikan dengan suatu persoalan yang terdiri dari lebih dua persamaan. Bahkan di suatu negara yang telah maju, terutama di dalam penggunaan alat berhitung otomatis yang modern, seperti komputer tidak jarang di dalam menemukan model ekonominya harus memecahkan suatu persamaan yang terdiri dari puluhan persamaan dengan ratusan variabel-variabel yang harus dicari nilainya, sehingga dengan demikian harus dihitung nilai-nilai parameter (koefisien-koefisien) yang juga ratusa jumlahnya.

Matriks pada dasarnya merupakan salah satu alat yang ampuh di dalam pemecahan persoalan-persoalan seperti di atas dan memudahkan di dalam pembuatan pemecahan analisa-analisa yang mencakup hubungan antara variabel-variabel. Di dalam statistik tidak jarang dijumpai penggunaan matriks untuk memecahkan persoalan *multiple regression*, juga di dalam memecahkan persoalan *operation research*/*linear programming* (program linear), matriks memegang peranan penting terutama sebagai landasan yang kuat untuk memahami pengertian-pengertian pemecahan dasr, metode simpleks dan lain sebagainya.

Di dalam analisa tabel input-output, penggunaan matriks memungkinkan untuk mengaitkan hubungan antara sektor yang satu dengan sektor yang lainnya, juga dapat dipergunakan untuk meramalkan output setiap sektor jika permintaan akhir (*final demand*) bagi setiap sektor sudah diketahui.

Itulah sebagian kecil tentang alasan-alasan pokok perlunya mempelajari matriks secara mendalam. Pengetahuan tentang matriks merupakan syarat pokok untuk bisa memahami teori-teori/analisa-analisa ekonomi modern yang sifat kunatitatif, misalnya ekonometrika, program linear, dan lain sebagainya.

Definisi

Matriks ialah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut *baris* dan *kolom* sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.[1]

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks berukuran (berdimensi) $m \times n$, yang kadang disingkat dengan "matiks $m \times n$". Bilangan-bilangan tadi disebut unsur-unsur matriks. Matriks $m \times n$ dapat dilambangkan dengan:

$$A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i = indeks baris

j = indeks kolom

Jika $m = n$, maka matriks tersebut dinamakan juga matriks bujur sangkar (*square matriks*)[2]. Melukiskan matriks dalam bentuk persegi panjang di atas adalah boros tempat, oleh karena itu kita lazim menuliskan matriks $A_{m\times n} = [a_{ij}]$.

Contoh

Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas disusun oleh 3 baris elemen, yaitu $(1,2,3,4)$, $(5,6,7,8)$, $(9,1,2,3)$ atau susunan dalam bentuk kolom-kolom:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{dan} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

[1] J. Supranto, Pengantar Matriks. (Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI, 1974). Hlm 3

[2] Rinaldi Munir, Matematika Diskrit. (Bandung: Informatika Bandung, 2009). Hlm 98

B. Matriks Khusus

Matriks khusus yang ditemukan dalam pembahasan matematika, antara lain: matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks transpos.

1. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar dengan $a_{ij} = 0$, dengan $i \neq j$ berarti seluruh elemen yang tidak terdapat pada posisi $i \neq j$ bernilai 0.

Contoh:

Di bawah ini adalah contoh-contoh matriks diagonal yang berukuran 3×3:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Matriks identitas

Matriks identitas, dilambangkan dengan I. Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya sama dengan 1.

Contoh:

Di bawah ini adalah contoh-contoh matriks I, masing-masing 3×3 dan 4×4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks segitiga atas/bawah

Matriks segitiga atas/bawah adalah matriks jika elemen-elemen di atas/ di bawah diagonal bernilai 0, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i < j$ atau $i > j$.

Contoh:

Di bawah ini adalah contoh matriks segitiga. Yang pertama matriks segitiga atas dan yang kedua matriks segitiga bawah.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Matriks transpos

Matriks transpos adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom. Misalkan $A = [a_{ij}]$ berukuran $m \times n$, maka transpos matriks A, ditulis A^T, adalah matriks $n \times m$ yang dalam hal ini jika $A^T = [b_{ij}]$, maka $b_{ij} = a_{ji}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n$ dan $j = 1,2,3, \dots, m$.

Contoh:

Di bawah ini adalah sebuah matriks A dan transpos-nya A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Determinan matriks

Determinan suatu matriks bujursangkar A dilambangkan dengan $\det(A)$ adalah bilangan yang diperoleh dari unsur-unsur A dengan pengerjaan tertentu seperti di bawah ini:

- Untuk $A_{1\times1} = [a]$ maka $\det(A) = a$
- Untuk $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Untuk $A_{n\times n} = (a_{ij})$ maka

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(M_{i1})$$

dengan matriks M_{i1} diperoleh dari A dengan mencoret baris ke $- i$ dan kolom ke $- 1$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-3) - (4)(6) + (7)(-3)$$

$$= -48$$

Sifat-sifat determinan

Untuk A matriks bujur sangkar

1. Jika tiap unsur dalam suatu baris (kolom) adalah nol maka $\det(A) = 0$
2. Jika B diperoleh dari A dengan
   a. Mempertukarkan dua baris (kolom) maka $\det(B) = -\det(A)$
   b. Mengalikan semua unsur suatu baris (kolom) dengan skalar k maka $\det(B) = k\det(A)$
   c. Setiap unsur suatu baris (kolom) dikalikan dengan skalar k kemudian dilambangkan kepada unsur yang sesuai pada baris (kolom) lain maka $\det(B) = \det(A)$

C. Operasi Matriks

Definisi:

Dua matriks A dan B dikatakan sama yaitu $A = B$ jika A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama dan disamping itu elemen-elemen pada baris dan kolom yang bersangkutan harus sama, artinya $a_{ij} = b_{ij}$, untuk semua nilai i dan j, dimana:

a_{ij} = elemen matiks A dari baris i dan kolom j

b_{ij} = elemen matiks B dari baris i dan kolom j

Jika A dan B tidak sama, ditulis $A \neq B$ ini berarti $a_{ij} \neq b_{ij}$ untuk beberapa i dan j.[3]

[3] J. Supranto, Pengantar Matriks. (Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI, 1974). Hlm 13

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   $A = B$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},$

   $A \neq B$ karena $a_{11} \neq a_{21}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

   $A \neq B$ karena jumlah kolom pada matriks *A* tidak sama dengan jumlah kolom pada matriks *B*.

1. Penjumlahan matriks

Matriks $A = a_{ij}$, dengan *m* baris dan *n* kolom, dan matriks $B = b_{ij}$, juga *m* baris dan *n* kolom, dijumlahkan (dikurangkan) maka diperoleh matriks yang ketiga, yaitu matriks $C = c_{ij}$ dengan *m* baris dan *n* kolom dimana elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan (mengurangkan) elemen-elemen matriks *A* dengan elemen-elemen matriks *B* yaitu bahwa: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk semua *i* dan *j*, dimana c_{ij} merupakan elemen dari baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

$$A + B =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = C$$

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

2. Pengurangan matriks

$A - B = A + (-1)B$

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A - B = A + (-1)B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan:

Penjumlahan dan pengurangan dua matriks dapat dilakukan jika kedua matriks tersebut mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama.

Hukum Asosiatif dan komutatif berlaku juga pada penjumlahan matriks.

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$

3. Perkalian matriks

Definisi

Jika $A_{m\times n} = (a_{ij})$ yaitu matriks dengan *m* baris dan *n* kolom, $B_{n\times p} = (b_{ij})$ matriks dengan *n* baris dan *p* kolom, kemudian dengan perkalian matriks $A \times B = A.B = AB$, kita makudkan suatu matriks $C_{m\times p}; (AB =)$, yaitu matriks dengan *m* baris dan *p* kolom, dimana elemen *C* dari baris ke-*i* kolom ke-*j* diperoleh dengan rumus:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Dimana $i = 1,2,3, \dots, m$

$j = 1,2,3, \dots, p$

$AB = C$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix} = C$$

Catatan:

Perkalian dua matriks dapat dilakukan jika jumlah kolom dari matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan matriks kedua maka dikatakan *conformable*.

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 + 2.7 & 1.6 + 2.8 \\ 3.5 + 4.7 & 3.6 + 4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 24 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Pada matriks tidak berlaku sifat komutatif, yaitu $AB \neq BA$, jika $AB = BA$ maka kedua matriks itu dikatakan *commute*.

4. Perkalian matriks dengan skalar

Jika matriks A dikalikan dengan skalar k maka semua elemen dari matriks A harus dikalikan dengan k. Jadi jika $A = (a_{ij})$ maka $kA = k(a_{ij}) = (a_{ij})k = Ak$.

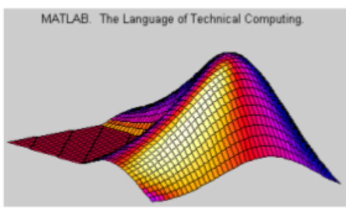
Contoh:

$k = 3, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$kA = 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

D. Aplikasi Komputer (Program Matlab) pada Matriks

Pada **Matlab** operasi aritmetika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dapat dibentuk langsung dengan matriks.



Langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk matriksnya. Ada beberapa cara dalam Matlab untuk membentuk matriks dengan metode yang sederhana. Sebagai contoh jika diketahui sebuah matriks 4 baris dan 3 kolom:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka untuk menuliskan di Matlab dapat dilakukan dengan mengetik perintah berikut:

$$\gg M = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6; 7\ 8\ 9; 0\ 1\ 2]$$

```
B =

   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
   0   1   2
```

Dapat bahwa nilai matriks yang dimasukkan berada dalam kurung siku. Elemen-elemen setiap baris harus dipisahkan dengan spasi (blanks) atau dengan tanda koma. Akhir dari tiap baris, kecuali baris yang terakhir dapat dinyatakan dengan " ; " (semicolon).

Jika diketahui matriksnya berukuran 3×3 dengan elemen-elemennya sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Maka untuk input ke Matlab selain dengan cara yang dituliskan sebelumnya, dapat dilakukan seperti berikut ini:

```
» D=[1 2 3
4 5 6
7 8 9]

D =
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
```

1. Transpos matriks

Transpos matriks dapat dilakukan dengan memberikan tanda *apostrope* pada notasi matriks tersebut.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka untuk mendapatkan tranpos dari matriks A adalah dengan mengetikan perintah berikut di Matlab:

```
A =
   0   9   8
   7   6   5
   4   3   2
» B=A'
```

B =

0	7	4
9	6	3
8	5	2

atau

» conj(A')

ans =

0	7	4
9	6	3
8	5	2

2. Invers Matriks

Fungsi **inv** dalam Matlab digunakan untuk menghitung invers matriks.

Misalnya diketahui matriks *A* didefinisikan sebagai berikut:

A=[0 9 8; 7 6 5;4 3 2]

A =

0	9	8
7	6	5
4	3	2

Maka,

» B=inv(A)

B =

-0.1000	0.2000	-0.1000
0.2000	-1.0667	1.8667
-0.1000	1.2000	-2.1000

3. Determinan

Pada aplikasi aljabar, pengetahuan tentang determinan suatu matriks dibutuhkan. Matlab memlunyai fungsi *built-in* untuk ini, yaitu *function det* dirancang untuk perhitungan determinan.

Contoh:

$A = magic(3)$

» K=magic(3)

```
K =
    8   1   6
    3   5   7
    4   9   2
» det(K)
ans =
  -360
```

4. Penjumlahan dan Pengurangan

Dua matrisk A dan B, kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika mempunyai ukuran yang sama atau berdimensi sama.

Contoh:

a. Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan Matlab maka kedua matriks tersebut dapat dioperasikan untuk operasi penjumlahan dan pengurangan.

```
» A=[1 2;3 4;5 6]
A =
    1   2
    3   4
    5   6
» B=[7 8;9 0;1 2]
B =
    7   8
    9   0
    1   2
» C=A+B
C =
    8  10
   12   4
    6   8
» D=A-B
```

D =

-6 -6

-6 4

4 4

b. Jika diketahui vektor *x* adalah:

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan *y* mengurangi 1 dari setiap elemen vektor x, $y = x - 1$,

maka dengan Matlab hal di atas dapat dikerjakan sebagai berikut:

```
» x=[1;2;3]
x =
    1
    2
    3
» y=x-1
y =
    0
    1
    2
```

5. Perkalian matriks

a. Perkalian matriks dengan skalar

Jika *A* adalah suatu matriks dan *c* adalah suatu skalar maka hasil kali *cA* adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari *A* oleh *c*.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $c = 8$,

Maka diperoleh hasilnya dengan Matlab:

```
» A=[1 2;3 4; 5 6]
A =
    1    2
```

```
    3    4
    5    6
» c=3
c =
    3
» Q=c*A
Q =
    3    6
    9   12
   15   18
```

b. Perkalian matriks dengan matriks

Jika A adalah matriks dengan ukuran $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$.

Perkalian matriks dalam Matalb dinotasikan dengan " * ".

Contoh:

Jika matriks A berukuran 2×3 dan matriks B adalah 3×4 maka akan diperoleh hasilnya matriks C dengan ukuran 2×4.

```
» A=[1 2 3;4 5 6]
A =
    1    2    3
    4    5    6
» B=[9 8 7 6; 5 4 3 2; 1 0 9 8]
B =
    9    8    7    6
    5    4    3    2
    1    0    9    8
» C=A*B
C =
   22   16   40   34
   67   52   97   82
```

E. Sistem Persamaan Linear

Garis dalam bidang xy merupakan himpunan pasangan berurutan (x, y), secara aljabar dapat dinyatakan dengan persamaan yang berbentuk:

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$ ....(1) disebut persamaan linear, karena pangkat dari variabel (peubah) x dan y adalah satu.

Secara umum *persamaan linear* dalam n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \text{.......(2)}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ dan b_1 adalah konstata linear.

Solusi (penyelesaian) dari persamaan (2) mengandung pengertian bahwa terdapat suatu urutan dari n bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ yang jika disubstitusi secara berurutan menggantikan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ akan memenuhi persamaan itu atau dengan kata lain persamaan (2) menjadi persamaan yang benar.

Himpunan semua persamaan seperti itu disebut himpunan penyelesaian (bilangan penyelesaian).

Sistem persamaan linear adalah kumpulan (himpunan berhingga) persamaan linear di dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Dalam bentuk umum, suatu sistem persamaan linear dapat dirumuskan:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \text{.........................(3)}$$

Sama halnya dengan persamaan, himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear adalah urutan dari bilangan-bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ yang jika dipakai untuk menggantikan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ memenuhi sistem persamaan itu[4].

1. Penyelesaian dengan menggunakan aturan Cramer

Diketahui

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array}\right\} \text{...(4)}$$

Dengan bantun pengertian matriks, maka persamaan 4 dapat dinyatakan sebagai persamaan matriks seperti berikut:

[4] N. Soemartojo, Program Linear. (Jakarta: Depdikbud.1995). hlm. 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

atau $A \times X = B$,

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

terdapat dua kemungkinan:

a) Jika $\det(A) = 0$ maka tidak terdapat A^{-1}

b) Jika $\det(A) \neq 0$ maka terdapat A^{-1}

Catatan:

$\det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Selanjutnya, untuk memperoleh pasangan (x, y) yang merupakan pemecahan sistem persamaan linear di atas, **Cramer** mengembangkan aturan

$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$ dan $y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$

$$\det(A_x) = a_{22}.b_1 - a_{12}.b_2$$

$$\det(A_y) = a_{11}.b_2.-a_{21}.b_1$$

Dengan demikian terdapat kemungkinan

a) $\det(A) = 0$; $\det(A_x) \neq 0$ dan $\det(A_y) \neq 0$

Menunjukkan sistem persamaan tidak mempunyai penyelesaian.

Secara geometris, kedua garis lurus sejajar, seperti gambar 1

b) $\det(A) = 0$; $\det(A_x) = 0$ dan $\det(A_y) = 0$

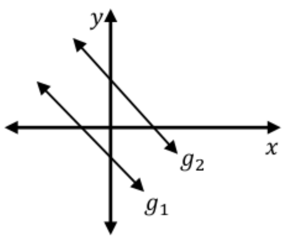
Menunjukkan sistem persamaan mempunyai banyak penyelesaian.

Secara geometris, kedua garis lurus berimpit, seperti gambar 2.

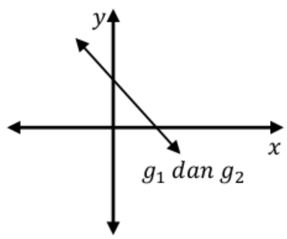
c) $\det(A) \neq 0$;

Menunjukkan sistem persamaan mempunyai satu penyelesaian.

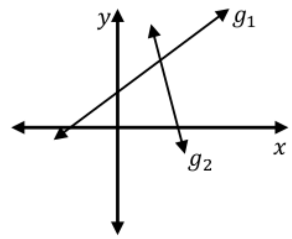
Secara geometris, kedua garis lurus berpotongan, seperti gambar 3.



Gambar 1.
tidak ada penyelesaian



Gambar 2.
tidak terhingga penyelesaian



Gambar 1.
satu penyelesaian

Contoh:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$ sistem persamaan tidak mempunyai penyelesaian (tidak konsisten)

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y=5 \\ 6x+8y=10 \end{array}\right\}$ sistem persamaan mempunyai penyelesaian tak berhingga (konsisten)

c) $\left.\begin{array}{l} 2x+4y=24 \\ 3x+5y=31 \end{array}\right\}$ sistem persamaan mempunyai satu penyelesaian (konsisten)

Penyelesaian:

$$\det(A) = 2.5 - 4.3 = 10 - 12 = -2$$

$$\det(A_x) = 24.5 - 31.4 = -4$$

$$\det(A_y) = 2.31 - 3.24 = -10$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2, y = \frac{-10}{-2} = 5$$

2. Penyelesaian sistem persamaan dengan Eliminasi Gauss

Prosedur penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi **Gauss** didasarkan pada upaya mereduksi matriks yang diperbesar menjadi *bentuk eselon baris yang direduksi*.

Perhatikan sistem persamaan (3). *Matriks yang diperbesar* (matriks lengkap) dari sistem persamaan itu dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris matriks yang diperbesar bersesuain atau diasosiasikan dengan persamaan dari persamaan (3). Oleh karena itu, pengerjaan mereduksi baris matriks yang diperbesar sesuai dengan pengerjaan mengeliminasikan variabel dari satu persamaan ke persamaan yang lainnya.

Proses mengeliminasikan persamaan ke persamaan yang lainnya adalah

a. Kalikan persamaan dengan konstanta yang tidak sama dengan nol, supaya konstanta (koefisien) variabel yang akan dieliminasikan dari persamaan yang lain, nilainya adalah satu
b. Pertukarkan dua persamaan
c. Tambahkan kelipatan suatu persamaan kepada persamaan lain, eliminasikan variabel terntentu.

10

Proses mereduksi baris di dalam matriks yang diperbesar yang bersesuain dengan pengerjaan pada sistem persamaan disebut *operasi baris elementer*, yaitu:

a. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tertentu yang tidak sama dengan nol
b. Pertukarkan dua baris
c. Tambahkan kelipatan suatu baris kepada baris yang lain

Perhatikan sistem persamaan berikut:

i. $x + 2y + 4z = 16$
ii. $3x + y = z = 4$
iii. $2x + 3y + z = 10$

untuk mengeliminasikan *x* dari persamaan i, ii, dan iii ditempuh langkah

a. Kalikan persamaan i dengan -3 kemudian tambahkan ke persamaan ii; kalikan i dengan (-2) kemudian tambahkan ke persamaan iii

$$x + 2y + 4z = 16$$
$$-5y - 13z = -44$$

$$-y - 7z = -22$$

b. Kalikan baris ketiga dengan (-1) kemudian pertukanrkan dengan baris kedua

$$x + 2y + 4z = 16$$

$$y + 7z = 22$$

$$-5y - 13z = -44$$

c. Kalikan baris ii dengan (-2) kemudian tambahkan ke baris i dan kalikan baris ii denga (5), setelah itu tambahkan ke baris iii

$$x - 10z = -28$$

$$y + 7z = 22$$

$$22z = 66$$

d. Kalikan iii dengan $\frac{1}{2}$

$$x - 10z = -28$$

$$y + 7z = 22$$

$$z = 3$$

Kalikan iii dengan (10) kemudian ke i

Kalikan iiii dengan (-7) kemudian tambahkan ke ii

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 3$$

atau matriks diperbesar sistem terakshir adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

adalah matriks dalam *bentuk eselon baris yang direduksi*.

Ringkasan

Matriks dalam bentuk eselon baris yang direduksi harus mempunyai sifat:

1. Jika suatu matriks tidak terdiri seluruhnya atas nol, maka bilangan tak nol pertama di dalam baris tersebut ialah 1 (dinamakan 1 utama)
2. Jika ada beberapa baris yang terdiri seluruhnya atas nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama pada baris urutan bawah (di bawah matriks)
3. Di dalam sebarang dua baris yang berturutan yang tidak terdiri seluruhnya atas nol, maka *1 utama* di dalam baris yang lebih rendah terdapat lebihjauh ke kanan daripada 1 utama di dalam baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang mengandung sebuah *1 utama* mempunyai nol di tempat lain.

Matriks yang mempunyai sifat 1, 2, dan 3 dikatakan berada di dalam *bentuk eselon baris*.

Prosedur penyelesaian sistem persamaan dengan menggunakan operasi baris elementer untuk memperoleh matriks diperbesar di dalam bentik eselon baris yang direduksi merupakan algoritma yang digunakan dalam analisis persoalan program linear dengan cara simpleks.

Latihan

1. Kondisi apakah yang harus dipenuhi p supaya sistem persamaan linear

$$2x + 3y = 15$$

$$px - 6y = 18$$

   Mempunyai penyelesaian $x > 0$?

2. Sistem persamaan

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$x + 8z = 17$$

$$2x + 5y + 3z = 3$$

   a. Nyatakan sebagai $A.X = B$
   b. $\det(A) = \cdots ?$

3. Sistem persamaan $A.X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   $\det(A_x)$= ...?

DAFTAR PUSTAKA

Aminuddin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howar. 1984. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga

Arhami Muhammad. 2005. Pemrograman Matlab. Yogyakarta: Andi Offset.

Munir Rinaldi. 2009. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

Soemartojo, Tapilouw Marthen. 1995. Materi Pokok Program Linear. Jakarta: Depdikbud Dirjend Pendidikan Dasar dan Menengah.

Supranto J. 1974. Pengantar Matriks. Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab III

Program Linear

Metode Grafik Maksimasi

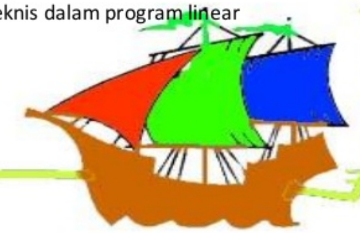
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- Mengenal program linear sebagai penunjang pengambilan keputusan
- Memahami syarat-syarat pemecahan persoalan program linear
- Menyelesaikan persoalan program linear dengan metode grafik maksimasi
- Memahami masalah teknis dalam program linear



FUNGSI TUJUAN MAKSIMISASI

A. Formulasi Permasalahan

Metode grafik hanya bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dimana hanya terdapat dua variabel keputusan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, langkah pertama yang harus dilakukan adalah memformulasikan permasalahan yang ada ke dalam bentuk Linear Programming (LP). Langkah-langkah dalam formulasi permasalahan adalah :

1. pahamilah secara menyeluruh permasalahan manajerial yang dihadapi
2. identifikasikan tujuan dan kendalanya
3. definisikan variabel keputusannya
4. gunakan variabel keputusan untuk merumuskan fungsi tujuan dan fungsi kendala secara matematis.

Sebagai contoh dalam memformulasikan permasalahan, berikut ini akan dibahas perusahaan Ikhwan Mandiri yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah $7,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah $5,-.

Namun untuk meraih keuntungan tersebut Ikhwan Mandiri menghadapi kendala keterbatasan jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 2 jam kerja, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 1 jam kerja. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 240 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 100 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi agar keuntungan perusahaan maksimum?

Dari kasus di atas dapat diketahui bahwa tujuan perusahaan adalah memaksimumkan profit. Sedangkan kendala perusahaan tersebut adalah terbatasnya waktu yang tersedia untuk pembuatan dan pengecatan. Apabila permasalahan tersebut diringkas dalam satu tabel akan tampak sebagai berikut:

TABEL 1.1 Informasi Permasalahan Ikhwan Mandiri

	Jam kerja untuk Membuat 1 unit produk		Total waktu tersedia per pekan
	Meja	Kursi	
Pembuatan	4	2	240
pengecatan	2	1	100
Profit	7	5	

Mengingat produk yang akan dihasilkan adalah meja dan kursi, maka dalam rangka memaksimumkan profit, perusahaan harus memutuskan berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi. Dengan demikian dalam kasus ini, yang merupakan variabel keputusan adalah meja (X1) dan kursi (X2).

Setelah kita mendefinisikan variabel keputusan, maka langkah selanjutnya adalah menuliskan secara matematis fungsi tujuan dan fungsi kendala.

1. Fungsi tujuan

Tujuan perusahaan adalah maksimisasi keuntungan, sehingga kita dapat menuliskan fungsi tujuan sebagai berikut :

P = ($7 x jumlah meja yang diproduksi + $5 jumlah kuris yang diproduksi

atau secara matematis dapat dituliskan :

Maksimisasi Z = $7X1 + $5X2

2. Fungsi kendala

Berkaitan dengan sumber daya yang digunakan, perusahaan tidak bisa memperkirakan secara tepat kebutuhan sumber daya yang digunakan untuk mencapai keuntungan tertentu. Biasanya perusahaan menyediakan sumber daya tertentu yang merupakan kebutuhan minimum atau maksimum. Kondisi seperti ini secara matematis diungkapkan dengan pertidaksamaan.

Kendala yang pertama adalah waktu yang tersedia di departemen pembuatan. Total waktu yang diperlukan untuk pembuatan X1 (meja) dimana untuk membuat satu unit meja diperlukan waktu 4 jam kerja dan untuk pembuatan X2 (kursi) dimana untuk membuat satu unit kursi diperlukan waktu 3 jam kerja adalah 240 jam. Kalimat ini bisa dirumuskan dalam pertidaksamaan matematis menjadi :

$$4X1 + 3X2 \leq 240$$

Seperti halnya pada kendala yang pertama, maka pada kendala kedua dapat diketahui bahwa total waktu yang diperlukan untuk pengecatan X1 (meja) dimana untuk mengecat satu unit meja diperlukan waktu 2 jam kerja dan untuk pembuatan X2 (kursi) dimana untuk mengecat satu unit kursi dibutuhkan waktu 1 jam kerja adalah 100 jam. Kalimat ini bisa dirumuskan dalam pertidaksamaan matematis menjadi :

$$2X1 + 1X2 \leq 100$$

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam Linear Programming adalah asumsi nilai X1 dan X2 tidak negatif. Artinya bahwa

$X1 \geq 0$ (jumlah meja yang diproduksi adalah lebih besar atau sama dengan nol)

$X2 \geq 0$ (jumlah kursi yang diproduksi adalah lebih besar atau sama dengan nol)

Dari uraian di atas dapat dirumuskan formulasi permasalahan secara lengkap sebagai berikut :

Fungsi tujuan :

Maksimisasi $Z = \$7X1 + \$5X2$.

Fungsi kendala :

$4X1 + 3X2 \leq 240$ (kendala departemen pembuatan)

$2X1 + 1X2 \leq 100$ (kendala departemen pengecatan)

$X1 \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

$X2 \geq 0$ (kendala non negatif kedua)

B. Penyelesaian Linear Programming Secara Grafik

Kasus Ikhwan Mandiri tersebut akan kita selesaikan dengan metode grafik. Keterbatasan metode grafik adalah bahwa hanya tersedia dua sumbu ordinat, sehingga tidak bisa digunakan untuk menyelesaikan kasus yang lebih dari dua variabel keputusan.

Langkah pertama dalam penyelesaian dengan metode grafik adalah menggambarkan fungsi kendalanya. Untuk menggambarkan kendala pertama secara grafik, kita harus merubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan seperti berikut.

$4 X1 + 3 X2 = 240$

Kendala ini akan memotong salah satu atau kedua sumbu.

Sebagaimana halnya yang sudah kita pelajari dalam aljabar, bahwa untuk menggambarkan fungsi linear yang tidak lain merupakan garis lurus, maka kita akan mencari titik potong garis tersebut dengan kedua sumbu. Suatu garis akan memotong salah satu sumbu apabila nilai variabel yang lain sama dengan nol. Dengan demikian kendala pertama akan memotong X1, pada saat X2 = 0, demikian juga kendala ini akan memotong X2, pada saat X1 = 0.

Kendala I: $4 X1 + 3 X2 = 240$

memotong sumbu X1 pada saat $X2 = 0$

$4 X1 + 0 = 240$

$X1 = 240/4$

$X1 = 60$.

memotong sumbu X2 pada saat $X1 = 0$

$0 + 3 X2 = 240$

$X2 = 240/3$

$X2 = 80$

Kendala I memotong sumbu X1 pada titik (60, 0) dan memotong sumbu X2 pada titik (0,80).

Kendala II: 2 X1 + 1 X2 = 100

memotong sumbu X1 pada saat X2 = 0

2 X1 + 0 = 100

X1 = 100/2

X1 = 50

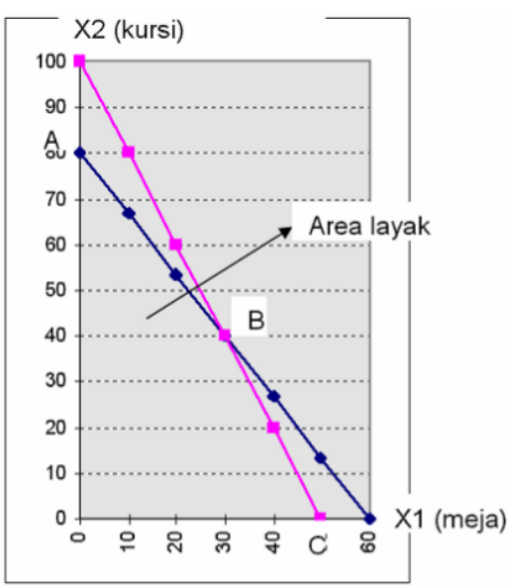
memotong sumbu X2 pada saat X1 =0

0 + X2 = 100

X2 = 100

Kendala II memotong sumbu X1 pada titik (50, 0) dan memotong sumbu X2 pada titik (0,100).

Peraga 1.1. Grafik Area Layak



Titik potong kedua kendala bisa dicari dengan cara substitusi atau eliminasi

$2 X1 + 1 X2 = 100$

$X2 = 100 - 2 X1$

$4 X1 + 3 X2 = 240$

$4 X1 + 3 (100 - 2 X1) = 240$

$4 X1 + 300 - 6 X1 = 240$

$- 2 X1 = 240 - 300$

$- 2 X1 = - 60$

$X1 = -60/-2 = 30.$

$X2 = 100 - 2 X1$

$X2 = 100 - 2 * 30$

$X2 = 100 - 60$

$X2 = 40$

Sehingga kedua kendala akan saling berpotongan pada titik (30, 40).

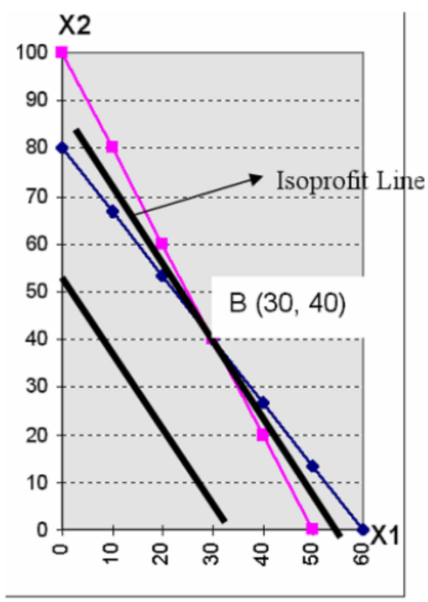
Tanda $\leq$ pada kedua kendala ditunjukkan pada area sebelah kiri dari garis kendala. Sebagaimana nampak pada Peraga 1. 1, *feasible region* (area layak) meliputi daerah sebelah kiri dari titik A (0; 80), B (30; 40), dan C (60; 0).

Untuk menentukan solusi yang optimal, ada dua cara yang bisa digunakan yaitu :

1. dengan menggunakan garis profit (*iso profit line*)
2. dengan titik sudut (*corner point*)

Penyelesaian dengan menggunakan garis profit adalah penyelesaian dengan menggambarkan fungsi tujuan. Kemudian fungsi tujuan tersebut digeser ke kanan sampai menyinggung titik terjauh dari dari titik nol, tetapi masih berada pada area layak (feasible region). Untuk menggambarkan garis profit, kita mengganti nilai Z dengan sembarang nilai yang mudah dibagi oleh koefisien pada fungsi profit. Pada kasus ini angka yang mudah dibagi angka 7 (koefisien X1) dan 5 (koefisien X2) adalah 35. Sehingga fungsi tujuan menjadi 35 = 7X1 + 5 X2. Garis ini akan memotong sumbu X1 pada titik (5, 0) dan memotong sumbu X2 pada titik (0, 7).

Dari Peraga 1. 2 dapat dilihat bahwa *iso profit line* menyinggung titik B yang merupakan titik terjauh dari titik nol. Titik B ini merupakan titik optimal. Untuk mengetahui berapa nilai X1 dan X2, serta nilai Z pada titik B tersebut, kita mencari titik potong antara kendala I dan kendala II (karena titik B merupakan perpotongan antara kendala I dan kendala II). Dengan menggunakan eliminiasi atau subustitusi diperoleh nilai X1 = 30, X2 = 40. dan Z = 410. Dari hasil perhitungan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa keputusan perusahaan yang akan memberikan profit maksimal adalah memproduksi X1 sebanyak 30 unit, X2 sebanyak 40 unit dan perusahaan akan memperoleh profit sebesar 410.



Peraga 1. 2. Iso profit line

Penyelesaian dengan menggunakan titik sudut (corner point) artinya kita harus mencari nilai tertinggi dari titik-titik yang berada pada area layak (feasible region). Dari peraga 1, dapat dilihat bahwa ada 4 titik yang membatasi area layak, yaitu titik 0 (0, 0), A (0, 80), B (30, 40), dan C (50, 0).

Keuntungan pada titik O (0, 0) adalah (7 x 0) + (5 x 0) = 0.

Keuntungan pada titik A (0; 80) adalah (7 x 0) + (5 x 80) = 400.

Keuntungan pada titik B (30; 40) adalah (7 x 30) + (5 x 40) = 410.

Keuntungan pada titik C (50; 0) adalah (7 x 50) + (5 x 0) = 350.

Karena keuntungan tertinggi jatuh pada titik B, maka ebaiknya perusahaan memproduksi meja sebanyak 30 unit dan kursi sebanyak 40 unit, dan perusahaan memperoleh keuntungan optimal sebesar 410.

Ringkasan

37

Program linear dengan metode grafik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dengan 2 variabel keputusan. Dalam penyelesaian permasalahan diawali dengan formulasi permasalahan, kemudian menggambarkan fungsi kendala serta menentukan area layak. Baru kemudian menentukan solusi optimal yang dapat menggunakan 2 pendekatan, yaitu dengan pendekatan garis profit (*isoprofit line*) atau titik sudut (*corner point*).

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

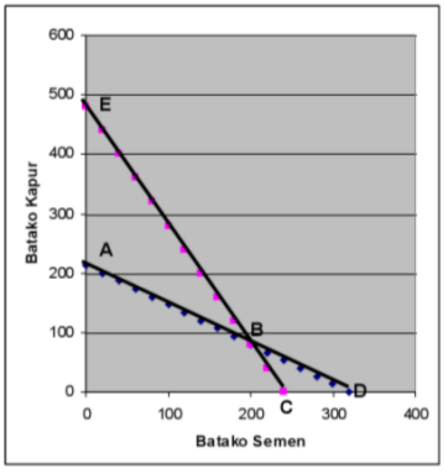
1) Apa yang dimaksud dengan LP?
2) Tuliskan 4 ciri kusus yang melekat pada permasalahan LP.
3) Tuliskan 5 asumsi dasar yang harus dipenuhi dalam penyelesaian permasalahan dengan menggunakan LP.
4) Tuliskan langkah-langkah dalam formulasi permasalahan LP.
5) Apa syarat permasalahan dapat diselesaikan dengan metode grafik?
6) Apa yang dimaksud dengan area layak (*feasible region*)?
7) Bagaimana cara menentukan solusi optimal dengan menggunakan *isoprofit line*?
8) Bagaimana cara menentukan solusi optimal denan cara *corner point*?

Pilih salah satu jawaban yang paling tepat dari beberapa alternatif jawaban yang disediakan !

Kasus 1 digunakan untuk menjawab pertanyaan nomor 1 s.d. 5

PT Padat Karya memproduksi dua macam batako: batako semen dan batako kapur. Biaya pembuatan batako semen diperkirakan Rp. 150,- sedang biaya pembuatan batako kapur diperkirakan Rp. 100,-. Batako semen dijual seharga Rp. 400,- dan batako kapur dijual seharga Rp. 250,-.

Untuk pembuatan kedua macam batako tersebut dipergunakan 2 macam mesin: A: mesin pencampur dan B: mesin pencetak. Untuk mencampur batako semen diperlukan waktu 1 jam, dan untuk mencetak batako semen diperlukan waktu 2 jam. Batako kapur dicampur selama 1.5 jam dan dicetak selama 1 jam. Selama satu bulan kapasitas mesin A 320 jam kerja. Sedang kapasitas mesin B adalah 480 jam kerja. Jika tujuan perusahaan memaksimumkan keuntungan , jawablah pertanyaan nomor 1 – 5 berikut ini.



1) Formulasi dalam bentuk Linear Programming dari permasalahan di atas adalah:

A. Fungsi Tujuan Max $Z = 400X + 250Y$

Fungsi Kendala
$X + 1{,}5Y \leq 320$
$2X + Y \leq 480$
$X \leq 0$
$Y \leq 0$

B. Fungsi Tujuan Max $Z = 150X + 100Y$

Fungsi Kendala
$X + 1{,}5Y \leq 320$
$2X + Y \leq 480$
$X \geq 0$
$Y \geq 0$

C. Fungsi Tujuan Max $Z = 250X + 150Y$

Fungsi Kendala
$X + 1{,}5Y \leq 320$
$2X + Y \leq 480$
$X \geq 0$
$Y \geq 0$

D. Fungsi Tujuan Max $Z = 250X + 150Y$

Fungsi Kendala
$X + 2Y \leq 320$
$1{,}5X + Y \leq 480$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

2) Dari gambar di atas yang merupakan area layak adalah area yang dibatasi titik
   A. 0ABC
   B. ABE
   C. CDB
   D. 0EBD
3) Jumlah batako semen dan batako kapur yang harus diproduksi agar profit maksimum adalah :
   A. Batako semen 80 unit dan batako kapur 200 unit
   B. Batako semen 200 unit dan batako kapur 80 unit
   C. Batako semen 320 unit dan batako kapur 0 unit
   D. Batako semen 0 unit dan batako kapur 480 unit
4) Besarnya keuntungan maksimum adalah :
   A. Rp 80.000,-
   B. Rp. 72.000,-
   C. Rp. 62.000,-
   D. Rp 55.000,-
5) Solusi optimal terjadi pada :
   A. Titik A
   B. Titik B
   C. Titik D
   D. Titik C

DAFTAR PUSTAKA

Aminuddin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howar. 1984. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga

Arhami Muhammad. 2005. Pemrograman Matlab. Yogyakarta: Andi Offset.

Munir Rinaldi. 2009. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

Soemartojo, Tapilouw Marthen. 1995. Materi Pokok Program Linear. Jakarta: Depdikbud Dirjend Pendidikan Dasar dan Menengah.

Supranto J. 1974. Pengantar Matriks. Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab IV

Program Linear Metode Grafik Minimisasi

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- Mengenal program linear sebagai penunjang pengambilan keputusan
- Memahami syarat-syarat pemecahan persoalan program linear
- Menyelesaikan persoalan program linear dengan metode grafik masalah minimisasi
- Memahami masalah teknis dalam program linear

FUNGSI TUJUAN MINIMISASI

A. Penyelesaian Linear Program Secara Grafik Untuk Fungsi Tujuan Minimisasi

Permasalahan minimisasi dapat juga diselesaikan secara grafik. Langkah-langkah penyelesaian permasalahan sama dengan penyelesaian permasalahan untuk fungsi tujuan maksimisasi yaitu: formulasi permasalahan, menentukan area layak, serta menentukan solusi optimal.

Dalam menentukan solusi optimal, seperti halnya pada permasalahan maksimisasi, dapat digunakan pendekatan garis profit atau titik sudut. Untuk lebih memahami penyelesaian permasalahan minimisasi berikut dibahas kasus Valentine Meal.

Valentine Meal adalah makanan yang terbuat dari Jagung dan Kacang. Makanan ini memiliki kandungan sekurang-kurangnya 30% Protein dan Serat maksimal 5% sebagaimana tampak pada tabel berikut ini.

Tabel 4.1

	kandungan gizi per kilogram		
	Protein	Serat	biaya
Jagung	0,09	0,02	0,30
Kacang	0,60	0,06	

Valentine Meal ingin menentukan biaya terendah dari makanan tersebut.

Karena makanan tersebut terbuat dari Jagung dan Kacang, variabel keputusan untuk model tersebut dapat dirumuskan demikian

J = banyaknya jagung yang digunakan untuk campuran makanan

K = banyaknya kacang yang digunakan untuk campuran makanan

Fungsi tujuan adalah meminimumkan biaya dari campuran makanan, yang dirumuskan demikian

Minimize $Z = 0{,}3\ J + 0{,}9\ K$

Kendala dari model mencerminkan jumlah yang diperlukan dan persyaratan kandungan gizi yang diperlukan. Karena Valentine Meal memerlukan 800 kg makanan per hari, kendala tersebut bisa dirumuskan demikian:

$J + K \geq 800$

Kandungan protein dalam jagung (J) dan kacang (K) adalah (0,09 J + 0,6 K). Kandungan protein ini sekurang-kurangnya 30% dari campuran makanan. Oleh karena itu persamaannya menjadi demikian

$$0{,}09\ J + 0{,}6\ K \geq 0{,}3\ (J + K)$$

$$0{,}09\ J + 0{,}6\ K \geq 0{,}3\ J + 0{,}3K$$

$$(0{,}3\ J - 0{,}09\ J) + (0{,}3K - 0{,}6\ K) \leq 0$$

$$0{,}21\ J - 0{,}3\ K \leq 0$$

Dengan cara yang sama, kendala dari kandungan serat bisa dirumuskan demikian:

$$0{,}02\ J + 0{,}06\ K \leq 0{,}05\ (J + K)$$

$$0{,}02\ J + 0{,}06\ K \leq 0{,}05\ J + 0{,}05\ K$$

$$(0{,}05\ J - 0{,}02\ J) + (0{,}05K - 0{,}06\ K) \geq 0$$

$$0{,}03\ J - 0{,}01\ K \geq 0$$

Dari uraian di atas dapat dirumuskan formulasi permasalahan secara lengkap sebagai berikut :

Fungsi tujuan :

Minimize $Z = 0{,}3\ J + 0{,}9\ K$

Fungsi kendala :

$J + K \geq 800$ (kendala kebutuhan makanan per hari)

$0{,}21\ J - 0{,}3\ K \leq 0$ (kendala kandungan protein)

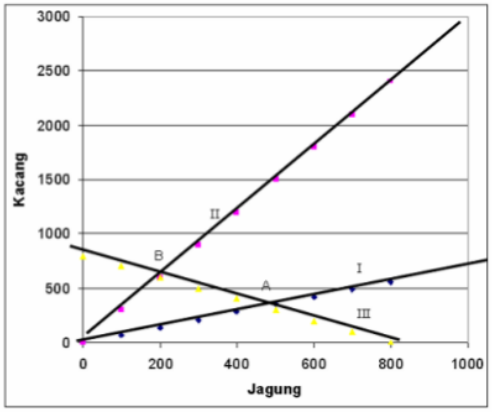
$0{,}03\ J - 0{,}01\ K \geq 0$ (kendala kandungan serat)

$J \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

$K \geq 0$ (kendala non negatif kedua)

Langkah pertama untuk menyelesaikan kasus Valentine Meal adalah dengan menggambarkan fungsi kendala sebagaimana tampak pada Peraga 1.3.

Peraga 1. 3. Grafik Valentine Meal



Titik potong ketiga kendala bisa dicari dengan cara substitusi atau eliminasi Titik potong kendala 1 (Protein: 0.21 J – 0.3 K ≤ 0) dan 3 (Kebutuhan per hari: 1 Jagung + 1 Kacang ≥ 800)

$0.21 J - 0.3 K = 0$

$0.21J = 0.3 K$

$J = (0.3/ 0.21) K$

$J + K = 800$

$(0.3 / 0.21) K + K = 800$

2,43 K = 800

K = 800/2,43

K = 329,22 dibulatkan menjadi 329.

J + 329,22 = 800

J = 470,78 dibulatkan menjadi 471.

Jadi titik potong kendala 1 (Protein: 0.21 J – 0.3 K ≤ 0) dan 3 (Kebutuhan per hari: 1 Jagung + 1 Kacang ≥ 800) terletak pada titik B (471, 329).

Titik potong kendala 2 (Serat: 0.03 J – 0.01 K ≥ 0) dan kendala 3 (Kebutuhan per hari: 1 J + 1 K ≥ 800)

$0.03 J – 0.01 K = 0$

$0.03 J = 0.01 K$

$J = (0.01/ 0.03)\ K$

$J = 0.33\ K$

- $J + K = 800$

  $0.33\ K + K = 800$

  $1.33\ K = 800$

  $K = 800 / 1.33$

  $K = 600$

  $J + 600 = 800$

  $J = 200$

Jadi titik potong kendala 2 (Serat: $0.03\ J - 0.01\ K \geq 0$) dan kendala 3 (Kebutuhan per hari: $1\ J + 1\ K \geq 800$) terletak pada titik B (200, 600).

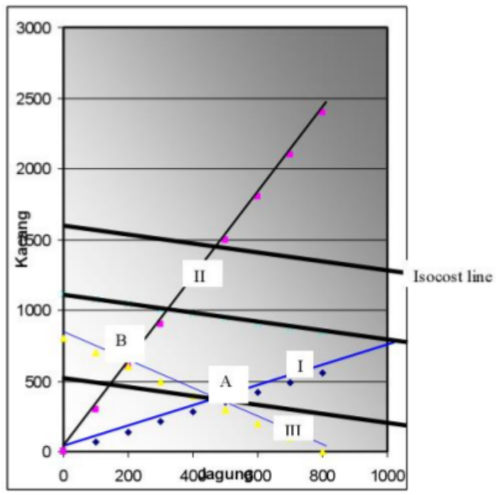
Tanda $\geq$ pada kendala Serat dan Kebutuhan per hari ditunjukkan pada area sebelah kanan dari garis kendala. Sebagaimana nampak pada Peraga 1.3, feasible region (area layak) meliputi daerah sebelah kanan dari titik A (200; 600), B (471; 329), atau di sebelah kanan kendala II dan III serta di sebelah kiri kendala I.

Untuk menentukan solusi yang optimal, ada dua cara yang bisa digunakan yaitu

1. dengan menggunakan garis biaya (*iso cost line*)
2. dengan titik sudut (*corner point*)

Penyelesaian dengan menggunakan *iso cost line* adalah penyelesaian dengan menggambarkan fungsi tujuan. Kemudian fungsi tujuan tersebut digeser ke kiri sampai menyinggung titik terdekat dari titik nol, tetapi masih berada pada area layak (*feasible region*). Untuk menggambarkan garis isocost, kita mengganti nilai Z dengan sembarang nilai yang mudah dibagi oleh koefisien pada fungsi biaya. Pada kasus ini angka yang mudah dibagi angka 0.3 (koefisien J) dan 0.9 (koefisien K) adalah 270. Sehingga fungsi tujuan menjadi $270 = 0.3\ J + 0.9\ K$. Garis ini akan memotong sumbu J pada titik (900, 0) dan memotong sumbu K pada titik (0, 300).

Peraga 1. 3. Garis Iso Cost pada Valentine Meal



Dari Peraga 1.3 dapat dilihat bahwa iso cost line menyinggung titik A yang merupakan titik terdekat dari titik nol. Titik A ini merupakan titik optimal. Untuk mengetahui berapa nilai J dan K, serta nilai Z pada titik A tersebut, kita mencari titik potong antara kendala I dan kendala III (karena titik A merupakan perpotongan antara kendala I dan kendala III). Dengan menggunakan eliminiasi atau substitusi diperoleh nilai J = 471, K = 329. dan Z = 437. Dari hasil perhitungan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa keputusan perusahaan yang akan memberikan biaya minimal adalah J sebanyak 471 unit, K sebanyak 329 unit dan perusahaan akan mengalokasikan biaya sebesar 437.

Penyelesaian dengan menggunakan titik sudut (corner point) dari Peraga 1.3 dapat dilihat bahwa ada 2 titik yang dekat yang membatasi area layak, yaitu titik A yang merupakan perpotongan kendala I dan III serta titik B yang merupakan perpotongan kendala II dan III. Untuk penyelesaian dengan menggunakan titk sudut kita mencari nilai Z di kedua titik tersebut kemudian kita pilih nilai Z yang paling kecil. Titik A nilai J = 471 dan K = 329. Dengan substitusi angka tersebut ke fungsi tujuan kita peroleh 0,3 J + 0,9 K = (0,3 x 471) + (0,9 x 329) = 437,4 dibulatkan menjadi 437. dan pada titik B nilai J = 200 dan K = 600. Dengan mensubstitusikan nilai J dan K pada fungsi tujuan, kita peroleh:

0,3 J + 0,9 K = (0,3 x 200) + (0,9 x 600) = 600. Ternyata nilai Z pada titik A lebih kecil daripada titik B. Dengan demikian titik A adalah titik optimal.

B. Isu Teknis Dalam Program Linear

Dalam Program Linear dengan metode grafik sering dijumpai permasalahan secara teknis, yaitu:

1. *infeasibility*
2. *unboundedness*
3. *redundancy*
4. *alternate optimal solutions*

Infeasibility adalah suatu kondisi dimana tidak ada area layak yang memenuhi semua kendala. Sebagai contoh Apabila kasus Krisna Furniture ditambah kendala dari bagian pemasaran yang memberi syarat bahwa penjualan Meja minimal 60 buah dan penjualan Kursi minimal 60 buah, maka akibatnya tidak ada area layak (feasible region). Kondisi seperti ini disebut infeasibility.

Fungsi tujuan :

Maksimisasi Z = \$7X1 + \$5X2.

Fungsi kendala :

$4 X1 + 3 X2 \leq 240$ (kendala departemen pembuatan)

$2X1 + 1 X2 \leq 100$ (kendala departemen pengecatan)

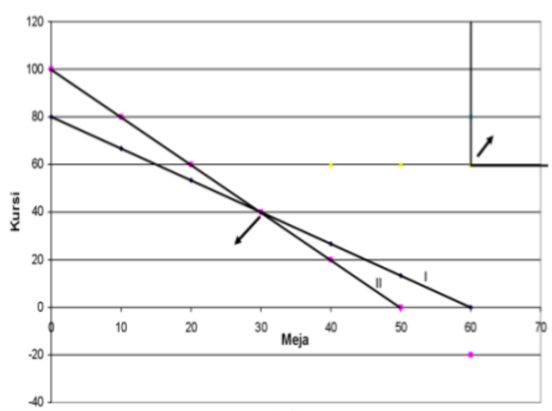
$1 X1 \geq 60$

$1 X2 \geq 60$

$X1 \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

$X2 \geq 0$ (kendala non negatif kedua)

Peraga 1. 4. Infeasibility



Unboundedness adalah suatu kondisi dimana area layak tidak terbatas. Kasus ini biasanya muncul pada fungsi tujuan maksimisasi. Misalkan saja Krisna Furniture lebih dahulu menentukan kendala dari pemasaran dan belum menentukan kendala dari segi operasi untuk *assembling dan finishing*. maka objective function menjadi tidak berhingga.

Fungsi tujuan :

Maksimisasi Z = \$7X1 + \$5X2.

Fungsi kendala :

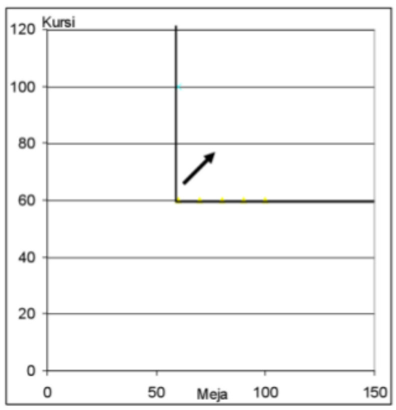
$1\,X1 \geq 60$

$1\,X2 \geq 60$

$X1 \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

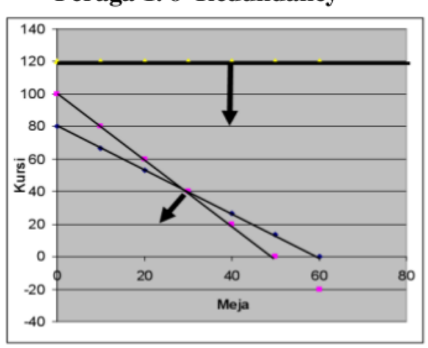
$X2 \geq 0$ (kendala non negatif kedua)

Peraga 1. 5 Unboundedness



Redundancy. Constraint yang tidak mempengaruhi feasible region disebut redundant conctraint. Misalkan pada kasus Krisna Furniture, bagian marketing mengatakan bahwa tidak bisa menjual lebih dari 50 buah kursi, maka pernyataan ini disebut redundant. Karena kenyataannya, bagian produksi maksimal hanya bisa memproduksi 40 kursi.

Peraga 1. 6 Redundancy



Alternatif Optima adalah situasi dimana terdapat lebih dari satu solusi optimal. Hal ini akan terjadi apabila garis profit sejajar dengan salah satu kendala. Misalkan kita rubah profit margin untuk Meja dan Kursi pada kasus Krisna Furniture menjadi 8 dan 6. Garis profit ini jika kita gambarkan akan sejajar dengan kendala I karena kemiringannya sama. Solusi optimalnya terletak sepanjang garis AB. Jadi solusi optimalnya bisa terletak pada alternatif I X1 = 0 dan X2 = 80 atau X1 = 30 dan X2 = 40 atau kombinasi lain sepanjang garis AB.

Fungsi tujuan :

Maksimisasi Z = $8X1 + $6X2.

Fungsi kendala :

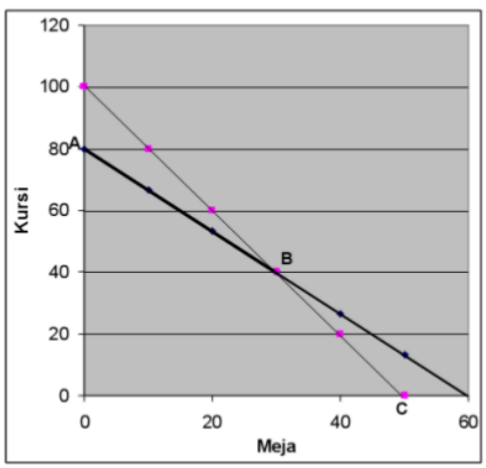
$4 X1 + 3 X2 \leq 240$ (kendala departemen pembuatan)

$2X1 + 1 X2 \leq 100$ (kendala departemen pengecatan)

$X1 \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

$X2 \geq 0$ (kendala non negatif kedua)

Peraga 1. 7. Alternatif Optima



Ringkasan

Pada kasus minimisasi kendala diberi tanda ≥ yang secara grafis titik-titik di sebelah kanan kendala yang memenuhi syarat. Pada kasus minimisasi solusi optimal dapat ditentukan dengan 2 cara yaitu dengan isocost line dan corner point. Untuk mencari solusi optimal denan isocost line, solusi optimal adalah titik yang paling dekat dengan titik nol tetapi masih berada pada area layak. Sedangkan penentuan solusi optimal dengan corner point, solusi optimal ditentukan dengan cara mencari nilai Z yang paling rendah

Dalam Linear Programming dengan metode grafik sering dijumpai permasalahan secara teknis, yaitu: infeasibility , unboundedness, redundancy, alternate optimal solutions.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1) Bagaimana cara menentukan solusi optimal dari permasalahan LP dengan fungsi tujuan
2) minimisasi dengan isocost line?
3) Bagaimana cara menentukan solusi optimal dari permasalahan LP dengan fungsi tujuan
4) minimisasi dengan corner point?
5) Apa yang dimaksud redundancy?
6) Apa yang dimaksud infeasibility?
7) Apa yang dimaksud alternative optima?
8) Apa yang dimaksud unboundedness?

Bab V

Dualitas

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear

ٱلْحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَلَا تَكُن مِّنَ ٱلْمُمْتَرِينَ ٦٠

(Apa yang telah Kami ceritakan itu), itulah yang benar, yang datang dari Tuhanmu, karena itu janganlah kamu termasuk orang-orang yang ragu-ragu. (QS. 3. Al-Imran :60)

8

A. Teori Dualitas

Teori dualitas merupakan salah satu konsep programa linier yang penting dan menarik ditinjau dari segi teori dan praktisnya. Ide dasar yang melatarbelakangi teori ini adalah bahwa setiap persoalan programa linier mempunyai suatu programa linier lain yang saling berkaitan yang disebut “dual”, sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (yang disebut "primal”) juga memberi solusi pada dualnya.

Pendefinisian dual ini akan tergantung pada jenis pembatas, tanda-tanda variabel, dan bentuk optimasi dari persoalan primalnya. Akan tetapi, karena setiap persoalan programa linier harus dibuat dalam bentuk standar lebih dahulu sebelum modelnya dipecahkan , maka pendefinisian dibawah ini akan secara otomatis meliputi ketiga hal di atas.

Bentuk umum masalah primal dual adalah sebagai berikut:

- **Primal**

Maksimumkan: $Z = c_1x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_nx_n$

Berdasarkan kendala:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \;\; &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

- **Dual**

Minimumkan: $Z = c_1y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_my_m$

Berdasarkan kendala:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m &\leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m &\leq c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \;\; &\quad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\leq c_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m &\geq 0 \end{aligned}$$

Kalau kita bandingkan kedua persoalan di atas, ternyata terdapat korespondensi antara primal dengan dual sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan bagi dual, sedangkan konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual.
2. Untuk tiap pembatas primal ada satu variaebl dual, dan untuk setiap variabel primal ada satu pembatas dual.
3. Tanda ketidaksamaan pada pembatas akan bergantung pada fungsi tujuannya.
4. Fungsi tujuan berubah bentuk (maksimasi menjadi minimasi dan sebaliknya).
5. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris (pembatas) pada dual.
6. Setiap baris (pembatas) pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.
7. Dual dari dual adalah primal.

B. Hubungan Primal Dual

Nilai tujuan dalam suatu pasangan masalah primal dan dual harus memenuhi hubungan berikut ini:

1. Untuk setiap pasangan pemecahan primal dual yang layak

$$\begin{pmatrix} nilai\ tujuan \\ dalam\ masalah\ maksimisasi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} nilai\ tujuan \\ dalam\ masalah\ minimisasi \end{pmatrix}$$

2. Di pemecahan optimum untuk kedua masalah

$$\begin{pmatrix} nilai\ tujuan \\ dalam\ masalah\ maksimisasi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nilai\ tujuan \\ dalam\ masalah\ minimisasi \end{pmatrix}$$

Untuk menjelaskan hubungan antara primal dan dual, perhatikan ilustrasi berikut ini :

Contoh:

Minimumkan: $Z = 16x_1 + 30x_2 + 36x_3$

Dengan kendala:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Soal ini kita selesaikan melalui penyelesaian dualnya, yakni :

Maksimumkan : $W = 60y_1 + 80y_2$

Dengan kendala:

$$2y_1 + 2y_2 \leq 16$$
$$3y_1 + 5y_2 \leq 30$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 36$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

C. Sifat-sifat Primal Dual yang Penting

Sifat-sifat primal dua penting untuk dipahami terutama pada saat kita membicarakan masalah analisis sensitivitas. Dengan menggunakan sifat-sifat ini kita dapat menentukan nilai variabel-variabel tertentu dengan cara yang sangat efisien. Ada empat sifat yang perlu diketahui, yaitu:

1. Menentukan koefisien fungsi tujuan variabel-variabel basis awal.

   Pada setiap iterasi solusi simpleks, baik primal maupun dual, koefisien fungsi tujuan variabel-variabel basis awalnya dapat dicari dengan cara:

   a. Mengalikan fungsi tujuan yang original dari variabel-variabel basis pada iterasi yang bersangkutan dengan matriks di bawah variabel basis awal pada iterasi yang bersangkutan. Koefisien ini biasa disebut simplex multiplier.

   $$\begin{bmatrix} \textit{koefisien fungsi tujuan} \\ \textit{yang original dari vari-} \\ \textit{abel basis pada iterasi} \\ \textit{yang bersangkutan} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textit{matriks di bawah} \\ \textit{variabel basis} \\ \textit{awal pada iterasi} \\ \textit{yang bersangkutan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{simplex} \\ \textit{multiplier} \end{bmatrix}$$

   b. Kurangi nilai-nilai simplex multiplier ini dengan fungsi tujuan yang original dari variabel-variabel basis awal.

2. Menentukan koefisien fungsi tujuan variabel-variabel nonbasis awal.

   Pada setiap iterasi dari persoalan primal, koefisien fungsi tujuannya dapat ditentukan dengan menyubstitusikan simplex multiplier pada variabel-variabel pembatas dari dual, kemudian mencari selisih antara ruas kiri dan ruas kanan dari pembatas dual tersebut.

3. Menentukan nilai ruas kanan (solusi) dari variabel-variabel basis.

Pada setiap iterasi, baik primal maupun dual, nilai ruas kanan (kolom solusi) variabel-variabel basis pada iterasi yang bersangkutan dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \text{matrikas di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi yang} \\ \text{bersangkutan} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriks kolom} \\ \text{ruas kanan} \\ \text{original} \\ \; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriks kolom} \\ \text{ruas kanan} \\ \text{variabel basis} \\ \; \end{bmatrix}$$

4. Menentukan koefisien pembatas.

Pada setiap iterasi, baik primal maupun dual, koefisien pembatas dari setiap variabel dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \text{matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi yang} \\ \text{bersangkutan} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas yang} \\ \text{original} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas pada iterasi} \\ \text{yang bersangkutan} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Maksimumkan : $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

Berdasarkan pembatas :

$4x_1 - 4x_2 \leq 5$

$-x_1 + 6x_2 \leq 5$

$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Salah satu iterasi dari persoalan di atas adalah sebagai berikut:

Basis	x_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Solusi
x_1	j	m	q	6/20	4/20	0	g
x_2	k	n	r	1/20	4/20	0	h
S_3	l	p	s	5/20	0	1	i
z	d	e	f	a	b	c	t

Tentukanlah harga-harga a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, dan t dengan menggunakan sifat-sifat primal dual.

Penyelesaian:

1. Sifat 1:

$$(4\ \ 6\ \ 0)\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3/2 \quad 2 \quad 0]$$

a = 3/2 – 0 = 3/2

b = 2 – 0 = 2

c = 0 – 0 = 0

2. Sifat 2:

SM = (3/2 2 0)

$x_1 : 4y_1 - y_2 - y_3 \geq 4$

4 (3/2) – 2 – 0 – 4 = 0

d = 0

$x_2 : -4y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 6$

-4 (3/2) + 6 (2) _ 0 – 6 = 0

e = 0

$x_3 :\ y_3 \geq 2$

0 – 2 = - 2

f = -2

3. Sifat 3:

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/4 \\ 25/4 \end{bmatrix}$$

g = 5/2

h = 5/4

i = 25/4

4. Sifat 4:

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

j = 1

k= 0

l = 0

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

m = 0

n = 1

p = 0

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

q = 0

r = 0

s = 1

Dengan demikian, t dapat dicari dengan memasukkan harga-harga g, h dan i ke dalam persamaan z, sehingga diperoleh:

t = 4 (5/2) + 6(5/4) _ 0(25/4)

t = 70/4

Ringkasan

Program linear adalah teknik matematika yang dirancang untuk membantu manager dalam merencanakan dan membuat keputusan dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan perusahaan.

Syarat-syarat perumusan suatu masalah ke dalam bentuk model program linear: (1) Tujuan masalah harus jelas, (2) Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin dibandingkan, (3) Adanya sumber daya yang terbatas, (4) Bisa dilakukan perumusan kuantitatif, (5) Adanya keterkaitan peubah (variabel).

Latihan

1. Tentukan dual dari persoalan berikut:

   Maksimumkan: $z = 36x_1 + 28x_2 + 32x_3$

   Berdasarkan:

   $2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 30$

   $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 40$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   Kemudian selesaikan soal ini dan tunjukkan marginal value dari bahan baku pada konstraint pertama dan kedua.

2. Tentukan dual dari persoalan berikut:

   Minimumkan: $z = 40x_1 + 20x_2 + 60x_3$

   Berdasarkan:

   $2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 24$

   $5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 8$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   Kemudian selesaikan dualnya dengan metode Simplex dan tunjukkan marginal value dari konstraint pertama dan kedua.

3. Perusahaan Ikhwan Mandiri memproduksi jaket dan tas kulit. Satu jaket memerlukan 8 meter persegi kulit dan satu tas hanya menggunakan 3 meter persegi. Persyaratan kerja untuk kedua produk tersebut masing-masing adalah 12 jam dan 4 jam. Harga pembelian kulit adalah $8 per meter persegi dan biaya tenaga kerja diperkirakan sebesar $15 per jam. Persediaan kulit mingguan saat ini dan tenaga kerja dibatasi sampai 1200 meter persegi dan 1800 jam. Perusahaan menjual jaket dan tas masing-masing dengan harga $350 dan $ 120. Tujuannya adalah untuk menentukan jadwal produksi yang memaksimumkan pendapatan bersih.

Perusahaan sedang mempertimbangkan untuk mmeperluas produksinya. Berapa harga pembelian maksimum yang harus dibayar perusahaan untuk kulit ? Untuk tenaga kerja ?

DAFTAR PUSTAKA

Aminuddin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howar. 1984. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga

Arhami Muhammad. 2005. Pemrograman Matlab. Yogyakarta: Andi Offset.

Munir Rinaldi. 2009. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

Soemartojo, Tapilouw Marthen. 1995. Materi Pokok Program Linear. Jakarta: Depdikbud Dirjend Pendidikan Dasar dan Menengah.

Supranto J. 1974. Pengantar Matriks. Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab VI

Metode Simpleks Maksimasi

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Memahami metode simpleks untuk memecahkan masalah program linear maksimasi

ٱلۡحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَلَا تَكُن مِّنَ ٱلۡمُمۡتَرِينَ ٦٠

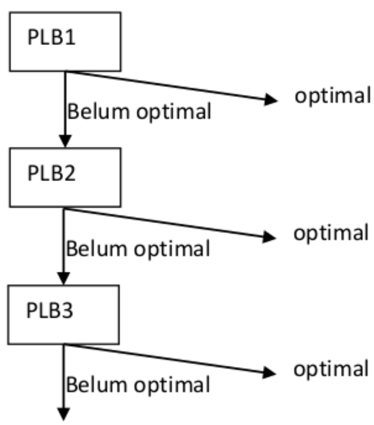
(Apa yang telah Kami ceritakan itu), itulah yang benar, yang datang dari Tuhanmu, karena itu janganlah kamu termasuk orang-orang yang ragu-ragu. (QS. 3. Al-Imran :60)

LINEAR PROGRAMMING : METODE SIMPLEKS PERMASALAHAN MAKSIMASI

A. Langkah-langkah Metode Simpleks

1. Pilih salah satu *penyelesaian layak basis* (plb)
2. Uji apah plb tersebut berupa *penyelesaian optimum* (po)

   Bila sudah optimum, sudah selesai, bila dilanjutkan ke langkah ke-3
3. Pilih plb baru yang lebih "baik" atau lebih "maju" (lebih dekat ke po) dibandingkan plb yang lalu. (Dalam hal ini diperlukan petunjuk untuk menentukan peubah mana yang masuk basis dan mana yang keluar agar peubah basis (pb) yang baru tetap layak dan plb baru ini lebih maju dibanding plb sebelumnya).



Kembali ke langkah-2 dst., sampai akhirnya ditemukan plb yang berupa po sebelumnya.

Kembali ke langkah-2 dst., sampai akhirnya ditemukan plb yang berupa po.

Guna mewadahi data-data soal dan mempermudah operasi langkah-langkah di atas di susun tabel disebut **tabel simpleks 2.1 sbb.**

tabel simpleks 2.1

	cj	c1 c2 . . . cn		
$\bar{c}$i	$\bar{x}$i xj	x1 x2 . . . xn	bi	Ri
$\bar{c}$1 $\bar{c}$2 . . . $\bar{c}$n	$\bar{x}$1 $\bar{x}$2 . . . $\bar{x}$m	a11 a12 . . . a1n a21 a22 . . . a2n . . . . am1 am2 . . . amn	b1 b2 . . . bm	R1 R2 . . . Rm
	zj		Z	
	zj - cj	z1 – c1 z2 – c2 . . . zn - cn	Z	

<u>Keterangan</u>:

xj : peubah- peubah lengkap

aij : koefisien teknis

bi : suku tetap (tak negatif)

cj : koefisien ongkos (fungsi tujuan)

$\bar{x}$i : peubah yang menjadi basis dalam tablo yang ditinjau

$\bar{c}$i : koefisien ongkos milik peubah basis $\bar{x}$i

zj : $\sum_{i=1}^{m} \bar{c}i$ aij (hasil kali dari $\bar{c}i$ dengan kolom aij

z : $\sum_{i=1}^{m} \bar{c}i$ bi (hasil kali dari $\bar{c}i$ dengan kolom bi

zj-cj : selisih zj dengan cj

apabila tablo bersangkutan belum optimum dan xk terpilih sebagai basis baru maka disusun kolom Ri ysng diperoleh dengan

$$Ri = \frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0$$

Dengan wadah berupa tablo di atas dan mengingat langkah-langkah simpleks sebelumnya maka dituntut bahwa suatu tablo memuat suatu plb. Jadi matriks aij sudah tersusut Gauss-Jordan dan $b_i \geq 0$ untuk semua i.

Langkah-langkah menjadi:

1. Menyusun tablo awal dengan matriks a_{ik} tersusut Gauss-Jordan dan $b_i \geq 0$.
2. Menguji keoptimuman tablo (maksudnya, keoptimuman plb dalam tablo). Bila sudah optimum berarti selesai. Bila belum optimum, langsung ke langkah (3)
3. Memperbaiki tablo, artinya memilih peubah baru yang masuk menjadi basis dan memilih peubah basis lama yang harus keluar (diganti)

B. Pola Maksimum Baku

Contoh:

Seorang pengusaha mebel memproduksi lemari dan meja dengan bahan-bahan mentah besi, kayu dan paku. Kebutuhan bahan per unit produksi dan batas maksimum persediaan bahan untuk satu masa produksi dan besar laba dari penjualan per unitnya tertera dalam tebel berikut.

bahan	satu unit		persediaan maksimum	satuan
	lemari	meja		
besi	1	2	36	batang
kayu	5	4	90	ribuan
paku	3	1	45	ons
laba	40	50		ribu rupiah

Bagaimana program produksi (berapa unit lemari dan mejasebaiknya diproduksi) supaya batas-batas persediaan tidak dilanggar tetapi memberikan laba total maksimum?

Penyelesaian:

Misalkan

x : banyaknya unit lemari yang diproduksi

y : banyaknya unit meja yang diproduksi

masalah di atas dapat dirumuskan menjadi

$$x + 2y \leq 36$$

$$5x + 4y \leq 90$$

$$3x + y \leq 45$$

$$x, y \geq 30$$

Memaksimumkan $f = 40x + 50y$

Dengan menyisipkan peubah-peubah sisipan (*slack variabel*) r, s, t akan timbul bentuk kanonik:

Mencari x,y,r,s,t yang memenuhi

$x + 2y + r \quad = 36$

$5x + 4y \;\; + s \quad = 90$

$3x + y \quad + t = 45$

x, y, r, s, t tak negatif

Dan memaksimumkan $f = 40x + 50y + 0r + 0s + 0t$

Tabel simpleks 2.2

	cj	40	50	0	0	0			
$\bar{c}$i	xi \ xj	x	y	r	s	t	bi	Ri	
0	r	1	2	1	0	0	36	18	
0	s	5	4	0	1	0	90	45/2	I
0	t	3	1	0	0	1	45	45	
	zj	0	0	0	0	0	0		
	zj - cj	-40	-50	0	0	0	0		
50	y	½	1	½	0	0	18	36	
0	s	3	0	-2	1	0	18	36/2	II
0	t	5/2	0	-½	0	1	27	54/5	
	zj	25	50	25	0	0	900		
	zj - cj	-15	0	25	0	0	900		
50	y	0	1	5/6	-1/6	0	15		
40	x	1	0	2/3	1/3	0	6		III
0	t	0	0	7/3	-5/6	1	12		
	zj	40	50	15	5	0	990		
	zj - cj	0	0	15	5	0	990		
		≥0							

Pada tabel simpleks 2.2 di atas pada kolom III ternyata sudah optimum dengan penyelesaian optimum soal bentuk kanonik: $(x, y, r, s, t) = (6,15,0,0,12)$, maka penyelesaian optimum soal asli adalah $(x, y) = (6,15)$ dengan nilai program 990. Penafsiran kembali ke masalah nyata akan berbunyi, sebaiknya diproduksi 6 unit almari dan 15 unit meja sehingga laba total maksimum dengan nilai 990 ribu rupiah.

Contoh soal di atas merupakan contoh yang berpola maksimum baku, sehingga dengan menambahkan peubah-peubah tambahan soal sudah siap dimasukkan dalam tabel simpleks. Contoh berikut berpola maksimum tidak baku.

Contoh 2:

Menentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

$$x + y + 2z \leq 12$$

$$2x - 6y - z \geq 4 \qquad \text{dan}$$

Memaksimumkan: $f = -8x + 6y + 8z$

Dengan menyelipkan 2 peubah tambahan s_1 dan s_2 sehingga diperoleh bentuk kanonik:

Mencari x, y, z, s_1, s_2

$$x + y + 2z + s_1 \qquad = 12$$

$$2x - 6y - z \qquad - s_2 = 4$$

x, y, z, s_1, s_2 tidak negatif

Dan memaksimumkan: $f = -8x + 6y + 8z + 0s_1 + 0s_2$

Bentuk ini tersusut bagi s_1 dan s_2 tetapi penyelesaian basis yang bersesuaian menjadi

$$(x, y, z, s_1, s_2) = (0,0,0,12,-4)$$

Jadi tidak layak karena memuat nilai negatif untuk s_2.

Supaya tabel awal sudah memuat penyelesaian basis yang layak maka pada penyelesaian kedua disispkan lagi satu peubah a sehingga kendala utama berbunyi:

$$x + y + 2z + s_1 \qquad = 12$$

$$2x - 6y - z \qquad - s_2 + a = 4 \ dengan \ a \geq 0$$

Sehingga susunan ini sudah memuat suatu plb ialah $(x, y, z, s_1, s_2, a) = (0,0,0,12,0,4)$, dengan s_1 sebagai basis ke-i dan a sebagai basis ke-2.

Sebelum a disisipkan kendala ke-2 harus sudah dalam bentuk persamaan. Sebagai akibat, timbul syarat perlu supaya soal asli mempunyai penyelesaian optimum, bahwa

Dalam tabel optimum, peubah semu a harus bernilai 0

Ini berarti bahwa masuknya a kedalam susunan hanya sebagai katalisator supaya algoritma simpleks dapat berjalan. Sebagai usaha supaya a segera bernilai 0 maka disusunlah fungsi sasaran baru dengan bentuk

$\bar{f} = f - Ma$ dengan M bilangan positif yang cukup besar.

Jadi untuk contoh di atas.

$$\bar{f} = -8x + 6y + 8z + 0s_1 + 0s_2 - Ma$$

Dengan demikian diharapkan bahwa a segera keluar dari basis karena koefisien ongkosnya adalah negatif besar.

Sekarang soal sudah siap dimasukkan kedalam **tabel simpleks 2.3**

tabel simpleks 2.3

	cj	-8	6	8	0	0	-M		
$\bar{c}$i	xi xj	x	y	z	s_1	s_2	a	bi	Ri
0 -M	s_1 a	1 2	1 -6	2 -1	1 0	0 -1	0 1	12 4	12 2
	zj	-2M	6M	M	0	M	-M	- 4M	
	zj - cj	- 2M+8	6M-M	M-8	0	M	0	- 4M	
0 -8	s_1 x	0 1	4 -3	5/2 -1/2	1 0	½ -1/2	-1/2 1/2	10 2	4 -
	zj	-8	24	4	0	4	-4	-16	
	zj - cj	0	18	-4	0	4	M-4	-16	
8 -8	Z x	0 1	8/5 -11/5	1 0	2/5 1/5	1/5 -2/5	-1/5 2/5	4 4	
	zj	-8	152/5	8	8/5	24/5	-24/5	0	
	zj - cj	0	122/5	0	8/5	24/5	M- 24/5		
		≥0							

Soal sudah optimum dengan 3 tabel. Dengan peralihan dari tabel I dan II ternyata a sudah keluar dari basis dan tidak masuk kembali. Ini yang diharapkan, sehingga dalam tabel optimum a bernilai nol, berarti $f_{maks} = \bar{f}_{maks}$ karena bila a = 0 maka $\bar{f} = f$. Penyelesaian optimum soal asli berbunyi

$$(x, y, z) = (4,0,4)$$

Dengan nilai program $f_{maks} = 0$.

Ringkasan

Metode Simpleks adalah salah metode alternatif penyelesaian masalah program linear jika jumlah variabel keputusan mengandung tiga atau lebih variabel keputusan. Gagasan metode simpleks adalah menerjemahkan definisi geometris atau grafik dari titik ekstrim atau titik sudut menjadi definisi aljabar.

Latihan

1. Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$2u + 3v - 5w \leq 15$$
$$2u - v + 3w \leq 3$$
$$3u + v - 2w \leq 2$$

   Dan maksimumkan: $f = 9u + 2v + 5w$

2. Tentukan x_1, x_2, x_3 tak negatif yang memenuhi

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 6$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$
$$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 10$$

   Dan maksimumkan: $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3$

3. Tentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

$$2y - z \leq -2$$
$$x + 4y + 2z = 5$$

   Dan maksimumkan: $f = 3x + 5y + 2z$

4. Tentukan x_1, x_2, x_3 tak negatif yang memenuhi

$$3x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 15$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$
$$33x_1 - 10x_2 + 9x_3 \leq 23$$

   Dan maksimumkan: $f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

5. Tentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

$$x + y \geq 20$$
$$y + z \leq 18$$
$$3x + 2y + 5z \leq 120$$

   Dan maksimumkan: $f = x + y + z$

6. Tentukan x, y tak negatif yang memenuhi

$$x + y \geq 7$$
$$2x + y \geq 8$$
$$2x - y \geq 6$$
$$x - 3y \leq 0$$
$$-2x + 6y \leq 25$$

Dan maksimumkan: $f = 40 - 5x + 20y$

7. Tentukan x_1, x_2, x_3 tak negatif yang memenuhi

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$
$$3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 15$$
$$33x_1 - 10x_2 - 9x_3 \leq 23$$

Dan maksimumkan: $f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

8. Tentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

$$x + y + 3z \leq 12$$
$$5x - 2y \geq 0$$
$$x + z = 6$$

Dan maksimumkan: $f = 3x + y + 5z$

:

DAFTAR PUSTAKA

Aminuddin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howar. 1984. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga

Arhami Muhammad. 2005. Pemrograman Matlab. Yogyakarta: Andi Offset.

Munir Rinaldi. 2009. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

Soemartojo, Tapilouw Marthen. 1995. Materi Pokok Program Linear. Jakarta: Depdikbud Dirjend Pendidikan Dasar dan Menengah.

Supranto J. 1974. Pengantar Matriks. Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab VII

Metode Simpleks Minimisasi

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Memahami metode simpleks untuk memecahkan masalah program linear minimisasi

ٱلۡحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَلَا تَكُن مِّنَ ٱلۡمُمۡتَرِينَ ٦٠

(Apa yang telah Kami ceritakan itu), itulah yang benar, yang datang dari Tuhanmu, karena itu janganlah kamu termasuk orang-orang yang ragu-ragu. (QS. 3. Al-Imran :60)

LINEAR PROGRAMMING : METODE SIMPLEKS PERMASALAHAN MINIMISASI

A. Pendahuluan

Hingga saat ini yang telah kita pelajari adalah penyelesaian permasalahan linear programming dengan tanda pertidaksamaan $\leq$ yang biasanya kita jumpai dalam permasalahan dengan fungsi tujuan maksimisasi. Prosedur dalam penyelesaian permasalahan maksimisasi dapat juga kita gunakan untuk menyelesaikan permasalahan minimisasi yang biasanya mempunyai tanda dan atau $=$ pada fungsi kendalanya.

Pada bab 7 ini akan kita bahas penyelesaian permasalahan LP dengan fungsi tujuan minimisasi. Pembahasan akan dimulai dengan memformulasikan permasalahan sesuai dengan standard simpleks, kemudian dilanjutkan dengan melakukan iterasi atau perbaikan tabel hingga optimal dan bagian terakhir pada bab ini akan dikemukakan beberapa issue teknis yang sering kita jumpai dalam metode simpleks. Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat:

1. Memformulasikan permasalahan sesuai standard simpleks untuk fungsi kendala dengan tanda $\geq$ dan atau $=$.
2. Menyelesaikan permasalahan linear programming dengan iterasi simpleks untuk fungsi tujuan minimisasi.
3. Menginterpretasikan tabel optimal simpleks
4. Memahami adanya kasus khusus di dalam metode simpleks.

Formulasi Permasalahan LP sesuai dengan Standard Simpleks :Kasus Minimisasi

B. Formulasi Permasalahan Menurut Metode Simpleks Untuk Tanda Pertidaksamaan $\geq$ Dan $=$

Pada topik ini akan kita bahas mengenai penyelesaian permasalahan LP dengan fungsi tujuan minimisasi. Pada permasalahan minimisasi, biasanya kita jumpai tanda $\geq$ pada fungsi kendala. Kendati demikian tidak menutup kemungkinan fungsi kendala mempunyai tanda $=$.

Dalam menyelesaikan permasalahan LP dengan metode simpleks, langkah pertama yang harus kita lakukan adalah menyesuaikan formulasi permasalahan dengan standard simpleks. Dengan kata lain kita harus merubah tanda pertidaksamaan menjadi persamaan.

Pada fungsi kendala dengan tanda $\leq$ kita harus menambahkan slack variabel yang menyatakan kapasitas yang tidak digunakan atau yang tersisa pada departemen tersebut. Hal ini karena ada kemungkinan kapasitas yang tersedia tidak semuanya digunakan dalam proses produksi. Pada permasalahan minimisasi kita jumpai fungsi kendala dengan tanda $\geq$, artinya bahwa kita dapat menggunakan sumberdaya lebih dari yang tersedia. Pertanyaan yang muncul adalah berapa besarnya kelebihan sumberdaya yang telah kita gunakan dari yang tersedia ?. Untuk menyatakan kelebihan sumberdaya yang digunakan dari yang tersedia ini, maka kita harus mengurangi kendala tersebut dengan surplus variabel. Surplus variabel ini sering juga disebut sebagai slack variabel yang negatif.

Karena nilai solusi pada permasalahan program linear harus non-negatif maka untuk mengatasi masalah ini kita harus menambahkan *artificial variabel* (A). Artificial variabel ini secara phisik tidak mempunyai arti, dan hanya digunakan untuk kepentingan perhitungan saja.

Untuk lebih memahami permasalahan ini marilah kita lihat permasalahan Galuh Chemical Company. Galuh Chemical Company harus membuat 1000 unit campuran phospate dan postassium. Biaya per unit phospate adalah \$5, sedangkan biaya per unit postassium \$6. Jumlah phospate yang dapat digunakan tidak lebih dari 300 unit sedangkan postassium harus digunakan minimal 150 unit. Berapa masing-masing jumlah phospate dan postassium yang harus digunakan agar biaya total minimum ?

Permasalahan Galuh Chemical Company dapat kita formulasikan ke dalam bentuk LP sebagai berikut :

Fungsi Tujuan :

Minimisasikan Cost $Z = 5X1 + 6X2$

Fungsi kendala :

$$X1 + X2 = 1000$$

$$X1 \leq 300$$

$$X2 \geq 150$$

$$X1, X2 \geq 0$$

Dimana X1 = jumlah phospate dalam unit

X2 = jumlah postassium dalam unit

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dengan metode simpleks kita harus memformulasikan kembali permasalahan tersebut sesuai dengan standard simpleks. Formulasi sesuai standard simpleks artinya kita harus merubah tanda pertidaksamaan (≤ maupun ≥) menjadi persamaan. Untuk kendala dengan tanda = kita hanya menambahkan artificial variabel saja. Sehingga kendala yang pertama akan menjadi :

$$X1 + X2 + A1 = 1000$$

Kendala kedua, $X1 \leq 300$, kita tambahkan slack variabel sehingga menjadi :

$$X1 + S1 = 300$$

Sedangkan kendala ketiga, $X2 \geq 150$, harus dikurangi dengan surplus variabel dan ditambah dengan artificial variabel, sehingga menjadi :

$$X2 - S2 + A2 = 150$$

Terakhir kita harus menuliskan fungsi tujuan. Karena dalam fungsi kendala ada artificial variabel, maka kita harus memberikan koefisien +M untuk artificial variable tersebut di fungsi tujuan. Koefisien +M ini menunjukkan angka yang sangat besar nilainya, sehingga dalam kasus ini dapat diinterpretasikan biaya yang sangat tinggi. Fungsi tujuan dalam permasalahan Galuh Chemical Company akan menjadi :

Minimisasikan biaya $Z = 5X1 + 6X2 + 0S1 + 0S2 + MA1 + MA2$

Formulasi sesuai standard simpleks dari permasalahan Galuh Chemical Company secara lengkap adalah :

Fungsi Tujuan :

Minimisasikan biaya $Z = 5X1 + 6X2 + 0S1 + 0S2 + MA1 + MA2$

Fungsi kendala :

$$X1 + X2 + A1 = 1000$$

$$X1 + S1 = 300$$

$$X2 - S2 + A2 = 150$$

$$X1, X2, S1, S2, A1, A2 \geq 0$$

Apabila pada fungsi kendala terdapat artificial variabel, sedangkan fungsi tujuannya maksimisasi, maka koefisien artificial variabel pada fungsi tujuan adalah –M.

C. Membuat Tabel Awal Simplek

Seperti halnya yang telah kita pelajari pada bab 2, langkah selanjutnya untuk menyelsesaikan permasalahan LP dengan metode simpleks adalah membuat tabel awal. Pada dasarnya untuk membuat tabel awal pada permasalahan minimisasi sama dengan permasalahan maksimisasi yang telah kita bahas pada bab 2. Hanya saja karena pada permasalahan Galuh Chemical Company kita mengenal variabel lain selain slack variabel yaitu surplus variabel dan artificial variabel, maka variabel yang boleh masuk ke kolom product mix pada tabel awal ini hanyalah slack variabel dan artificial variabel. Tabel awal permasalahan Galuh Chemical Company dapat dilihat pada Tabel 7.1.

Tabel 7.1. Tabel Awal kasus Galuh Chemical Company

	Cj	5	6	0	0	+M	+M	
Product Mix		X1	X2	S1	S2	A1	A2	Q
A1	+M	1	1	0	0	1	0	1000
S1	0	1	0	1	0	0	0	300
A2	+M	0	1	0	-1	0	1	150
	Zj	+M	2M	0	-M	+M	+M	1050M
	Cj-Zj	5-M	6-2M	0	M	0	0	

Angka pada baris Cj (5, 6, 0, 0, +M, +M) tersebut adalah koefisien pada fungsi tujuan. Sedangkan angka (1, 1, 0, 0, 1, 0) pada baris A1 serta angka (1, 0, 1, 0 0, 0) pada baris S1 dan angka (0, 1, 0, -1, 0, 1) pada baris A2 adalah koefisien pada kendala 1, 2 dan 3. Angka pada baris Zj (+M, 2M, 0, -M , +M, +M) diperoleh dari penjumlahan hasil kali kolom Cj dengan kolom yang bersesuaian. Sebagai contoh kita akan menentukan nilai Zj kolom X1 = (M x 1) + (0 x 1) + (M x 0) = M. Dengan cara yang sama kita peroleh nilai Zj pada kolom yang lain. Angka pada baris Cj – Zj diperoleh dari angka pada baris Cj dikurangi dengan angka pada baris Zj. Sebagai contoh kita akan menghitung nilai Cj – Zj pada kolom X1 = 5 (yaitu angka pada baris Cj) – M (angka pada baris Zj) = 5 - M . Demikian juga untuk menghitung nilai Cj – Zj untuk kolom-kolom yang lain digunakan cara yang sama.

Ringkasan

Dalam formulasi permasalahan LP sesuai standard simpleks untuk fungsi kendala dengan tanda ≥ harus dikurangi dengan surplus variable dan ditambah dengan artificial variable. Sedangkan untuk fungsi kendala dengan tanda = hanya ditambah ariticial variable.

Pada fungsi kendala terdapat artificial variable, maka pada fungsi tujuan harus ditambahkan koefisien -M untuk permasalahan maksimisasi serta koefisien +M untuk permasalahan minimisasi.

Latihan

1. Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$2u + 3v - 5w \leq 15$$
$$2u - v + 3w \leq 3$$
$$3u + v - 2w \leq 2$$
$$5x - 2y \geq 0$$
$$x + z = 6$$

Dan maksimumkan: $f = 3x + y + 5z$

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

2. Apakah yang dimaksud dengan surplus variabel ?
3. Bagimanakah formulasi yang sesuai dengan standard simpleks untuk fungsi kendala dengan tanda $\geq$.
4. Variabel apa sajakah yang boleh masuk ke dalam kolom product mix pada tabel awal simpleks?
5. Jika pada fungsi kendala terdapat artificial variable, bagaimanakah dampaknya pada fungsi tujuan minimisasi?
6. Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$u + 2v + 5w \geq 4$$
$$2u - v + 2w \geq 3$$
$$3u + 5v + w \geq 1$$

Dan minimumkan: $f = 2u + 6v + 7w$

7. Tentukan A, B, C tak negatif yang memenuhi

$$10A - 5B + C \leq 2$$
$$-15A + 10B + C \geq 1$$

Dan minimumkan: $f = -150A + 50B$

DAFTAR PUTAKA

[18] Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. [26] *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. 2004.

[2] Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab VIII

Analisis Sensitivitas

Perubahan Sisi Kanan Fungsi Kendala

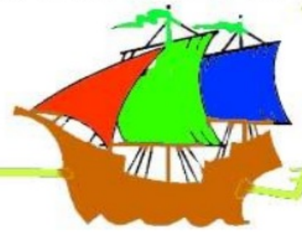
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menginterpretasikan *shadow price* pada tabel simpleks
- Memahami dampak perubahan sisi kanan fungsi 32dala baik secara parsial maupun simultan terhadap solusi optimal.
- Menentukan besarnya rentang perubahan sisi kanan fungsi kendala



ANALISIS SENSITIVITAS: PERUBAHAN SISI KANAN FUNGSI KENDALA

A. Pendahuluan

Analisis sensitivitas akan membahas bagaimana pengaruh perubahan sumber daya (sisi kanan fungsi kendala) atau koefisien fungsi tujuan terhadap nilai solusi optimal. Pada bab 8 ini akan dibahas mengenai analisis sensitivitas yang berkaitan dengan perubahan sisi kanan fungsi kendala, sedangkan analisis sensitivitas yang berkaitan dengan perubahan koefien fungsi tujuan akan dibahas di bab 9.

Pembahasan pada bab 8 ini akan dibagi dua, yaitu: pada bagian pertama akan dijelaskan mengenai *shadow price*, dampak perubahan sisi kanan fungsi kendala secara parsial terhadap solusi optimal serta dampak perubahan sisi kanan fungsi kendala secara simultan terhadap solusi optimal. Pada bagian kedua rentang peruabahan sisi kanan fungsi kendala agar solusi masih tetap optimal.

Analisis Sensitivitas: Shadow Price dan Dampak Perubahan Secara Parsial Sisi Kanan Fungsi Kendala pada Solusi Optimal

B. *Shadow Price*

Shadow price menyatakan berapa besarnya fungsi tujuan akan berubah jika sisi kanan fungsi kendala ditambah satu unit. Secara umum, *shadow price* untuk setiap kendala dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Shadow\ \ price = \frac{Perubahan\ dalam\ nilai\ optimal\ \ fungsi\ tujuan}{kenaikkan\ satu\ unit\ sisi\ kanan\ \ fungsi\ kendala}$$

Shadow price ini dapat kita lihat pada tabel optimal simpleks kolom slack variable baris Cj – Zj. Untuk lebih memahami konsep ini perhatikan kasus Ikhwan Furniture berikut ini.

Ikhwan Furniture menghasilkan 3 jenis produk yaitu Meja (T), kursi (C) serta Rak Buku (B) yang masing-masing produk diproses di tiga bagian yaitu bagian *assembly*, *finishing* serta bagian packing. Untuk menghasilkan 1 unit meja dibutuhkan waktu 3 jam di bagian *assembly*, 2 jam di bagian *finishing* dan 1 jam di bagian packing. Untuk menghasilkan 1 unit kursi dibutuhkan waktu 4 jam di bagian assembly, 1 jam dibagian finishing serta 3 jam di bagian packing. Sedangkan untuk menghasilkan 1 unit rak buku dibutuhkan waktu masing-masing 2 jam di bagian assembly, finishing dan packing. Keuntungan per unit meja adalah \$2, kursi \$4 sedangkan rak buku \$3. Permasalahan Ikhwan Furniture tersebut jika diformulasikan dalam bentuk program linear adalah sebagai berikut:

Fungsi Tujuan Max $Z = 2T + 4C + 3B$

Fungsi Kendala : $3T + 4C + 2B \leq 60$ kendala bagian *assembly*

$2T + 1C + 2B \leq 40$ kendala bagian *finishing*

$1T + 3C + 2B \leq 80$ kendala bagian *packing*

$T, C, B \geq 0$

Tabel optimal dari kasus Ikhwan Furniture jika diselesaikan dengan menggunakan simpleks dapat dilihat pada tabel 8.1 berikut ini.

Tabel 8. 1 Tabel Optimal Ikhwan Furniture

Cj		2	4	3	0	0	0	
	Product Mix	T	C	B	S1	S2	S3	Quantity
4	C	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	6 2/3
3	B	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	16 2/3
0	S3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	26 2/3
	Zj	23/6	4	3	5/6	2/3	0	76 2/3
	Cj - Zj	-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0	

Solusi optimal tercapai bila diproduksi 6 2/3 kursi (C), 16 2/3 rak buku (B), dan tidak memproduksi meja (T). Keuntungan yang diperoleh setiap minggunya adalah \$76,67 (atau \$76 2/3) . Perlu dicatat bahwa shadow price tersebut tampak pada baris Cj

– Zj kolom slack variable. Shadow price untuk assembly adalah – 5/6, shadow price untuk finishing adalah – 2/3, dan shadow price untuk packing adalah 0.

Pada kasus minimisasi (dual problem), variabel struktural A (bagian assembly) sebesar 5/6 dan F (bagian finishing) sebesar 2/3. Sedangkan variabel struktural P (bagian packing) adalah 0. Dengan demikian nilai shadow price pada primal problem sama dengan nilai variabel struktural pada dual problem. (Dual problem tidak dibicarakan pada modul ini. Namun demikian dapat dilihat pada buku lain yang berkaitan dengan riset operasional).

Nilai shadow price untuk assembly sebesar – 5/6 bisa diartikan bahwa setiap penambahan 1 jam kerja pada bagian assembly akan menambah keuntungan sebesar $0,83 (atau $5/6). Nilai shadow price untuk finishing sebesar – 2/3 bisa diartikan bahwa setiap penambahan 1 jam kerja pada bagian finishing akan menambah keuntungan sebesar $0,67 ($2/3). Sedangkan nilai shadow price pada bagian packing sebesar 0, berarti bahwa setiap penambahan 1 jam kerja pada bagian packing tidak menambah keuntungan. Hal ini dikarenakan waktu di bagian packing masih tersisa 26 2/3 jam (karena S3 yang merupakan *slack variable* berada pada kolom *product mix*).

7

C. Dampak perubahan secara parsial sisi kanan fungsi Kendala terhadap solusi optimal

Perubahan secara parsial sisi kanan fungsi kendala artinya kita mengasumsikan hanya salah satu kendala saja yang berubah, sedangkan kapasitas kendala yang lainnya dianggap konstan. Misalnya yang berubah hanya kapasitas bagian assembly saja, sementara bagian finishing dan packing tetap, atau bagian finishing saja yang berubah sementara bagian assembly dan packing tetap, atau bagian packing saja yang berubah sementara bagian assembly dan finishing tetap.

7

Kapasitas sisi kanan fungsi kendala bisa saja berubah. Perubahan ini dapat disebabkan oleh adanya karyawan yang lembur ataupun karena ada karyawan yang sakit. Adanya karyawan yang lembur menyebabkan bertambahnya kapasitas sisi kanan fungsi kendala, sedangkan adanya karyawan yang sakit akan menyebabkan berkurangnya kapasitas sisi kanan fungsi kendala. Adanya perubahan sisi kanan fungsi kendala, baik berupa penambahan jam kerja ataupun pengurangan jam kerja tentu saja akan berdampak pada solusi optimal. Pertanyaan yang sering muncul dalam permasalahan ini adalah bagaimana dampak penambahan atau pengurangan kapasitas sisi kanan fungsi kendala terhadap solusi optimal? Kita akan menjawab pertanyaan ini dengan menggunakan "change Vector". Change Vector adalah suatu angka yang mengukur perubahan nilai optimal basic variable karena adanya penambahan satu unit sisi kanan fungsi kendala. Change Vector ini dapat kita lihat pada baris basic variable (variable yang berada pada kolom product mix) kolom slack variable. Secara matematis change vector dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{Change Vector} = \frac{\text{perubahan dalam nilai optimal basic variable}}{\text{penambahan satu unit sisi kanan fungsi kendala}}$$

Untuk lebih memahami masalah ini akan kita bahas kembali kasus Ikhwan Furniture pada bagian A bab 8 ini. Seandainya ada penambahan 1 jam kerja pada bagian *assembly*. Bagaimana dampak penambahan 1 jam kerja pada bagian assembly terhadap solusi optimal ? Untuk menjawab pertanyaan ini perhatikan tabel 8.2 di bawah ini.

Tabel 8.2 Dampak Penambahan 1 jam kerja pada Bagian Assembly terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6 2/3	16 2/3	26 2/3	solusi lama
(1) × (1/3)	(1) × (-1/6)	(1) ×(-2/3)	perubahan
7	16 1/2	26	solusi baru

C, B dan S3 yang berada pada baris pertama tabel 8.2 adalah product mix, sedangkan angka yang berada pada baris kedua adalah kuantitas untuk setiap variabel keputusan, dan angka pada baris ketiga adalah perkalian antara besarnya perubahan dengan setiap change vector S1 (angka yang berada pada kolom S1). Karena yang berubah bagian assembly , maka angka yang kita gunakan angka pada kolom S1.

Dengan adanya penambahan satu jam kerja di bagian assembly, akan menambah jumlah C yang diproduksi menjadi 7, B menjadi 16 1/2. dan total keuntungan = (4 × 7) + (3 × 16 1/2) = 77,5 Perubahan keuntungan = 77.5 - 76.7 = 0.83 atau 5/6. Artinya dengan bertambahnya 1 jam kerja pada bagian assembly akan menambah keuntungan sebesar $0,83. Angka ini sama dengan shadow price pada bagian assembly.

Bagaimana jika pada bagian assembly ada karyawan yang tidak masuk kerja ? Karyawan yang tidak masuk kerja berarti akan mengurangi kapasitas sisi kanan fungsi kendala. Misalkan di bagian assembly ada karyawan yang tidak masuk kerja, sehingga kapasitas pada bagian assembly berkurang 1 jam kerja. Bagaimana dampak pengurangan jam kerja ini pada solusi optimal ? Untuk menjawab pertanyaan ini perhatikan tabel 8.3 di bawah ini.

Tabel 8.3 Dampak Pengurangan 1 jam kerja pada Bagian Assembly terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6 2/3	16 2/3	26 2/3	solusi lama
(-1) × (1/3)	(-1) × (-1/6)	(-1) ×(-2/3)	perubahan
6 1/3	16 5/6	27 1/3	solusi baru

Dengan adanya pengurangan sebesar 1 jam di bagian *assembly* menyebabkan jumlah C yang diproduksi turun menjadi 6 1/3 unit, B naik menjadi 16 5/6 unit sedangkan kapasitas bagian packing naik menjadi 27 1/3 jam. Pada tingkat produksi ini keuntungan yang diperoleh = (4 × 6 1/3) + (3 × 16 5/6) = 75 5/6 = 75,83. Perubahan keuntungan adalah = 75 5/6 – 76 2/3 = - 5/6 = -0,83. Artinya jika jam kerja di bagian assembly berkurang 1 jam maka keuntungan akan berkurang sebesar $0,83 .

Bagaimana jika perubahan sisi kanan fungsi kendala lebih dari 1 jam kerja. Sebagai contoh berikut akan kita bahas jika ada penambahan jam kerja di bagian assembly sebesar 10 jam. Bagaimana dampak perubahan ini terhadap solusi optimalnya? Untuk menyawab pertanyaan ini, kita tinggal mengalikan besarnya penambahan jam kerja bagian *assembly* dengan koefisien pada kolom S1. perhitungannya dapat dilihat pada tabel 8.4 berikut ini.

Tabel 8.4 Dampak Penambahan 10 jam kerja pada Bagian Assembly terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6,67	16,67	26,67	solusi lama
10 x 0,333	10 x -0,167	10 x -0,667	perubahan
10,00	15,00	20,00	solusi baru

Penambahan sebesar sepuluh jam kerja pada bagian *assembly*, akan menambah jumlah C yang diproduksi menjadi 10, B menjadi 15. sehingga total keuntungan = (4 x 10) + (3 x 15) = 85. Kenaikan keuntungan = 85 -76.7 = 8,3. Jika kita perhatikan besarnya penambahan keuntungan sama dengan 10 kali besarnya *shadow price*.

Analisis Sensitivitas: Dampak Perubahan Secara Simultan Serta Rentang Perubahan Sisi Kanan Fungsi Kendala

D. Dampak perubahan secara simultan sisi kanan fungsi Kendala terhadap solusi optimal

Pada topik 1 bagian B sudah dijelaskan dampak perubahan secara parsial sisi kanan fungsi kendala terhadap solusi optimal. Pada kenyataannya perubahan sisi kanan fungsi kendala seringkali berubah secara simultan. Adanya perubahan dalam satu departemn diikuti oleh perubahan departemen lainnya dalam waktu yang bersamaan. Bagaimana dampak perubahan secara simultan sisi kanan fungsi kendala ini terhadap solusi optimal ?

Untuk menjawab pertanyaan di atas perhatikan kembali kasus Ikhwan Furniture berikut ini. Sebagai contoh misalkan bagian assembly ditambah satu jam kerja dan bagian finishing juga ditambah satu jam kerja. Dampak penambahan 1 jam kerja pada dua bagian ini terhadap solusi optimal dapat dilihat pada tabel 8.5.

Tabel 8.5 Dampak Penambahan Satu Jam Kerja pada Bagian *Assembly* dan *Finishing* terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6 2/3	16 2/3	26 2/3	solusi lama
(1) × (1/3)	(1) × (-1/6)	(1) × (-2/3)	perubahan assembly
(1) × (-1/3)	(1) × (2/3)	(1) × (-1/3)	perubahan finishing
6 2/3	17 1/6	25 2/3	solusi baru

Dengan adanya penambahan masing-masing satu jam kerja pada bagian assembly dan finishing mengakibatkan jumlah C yang diproduksi menjadi 6 2/3, B menjadi 17 1/6. Keuntungan yang diperoleh = (4 x 6 2/3) + (3 x 17 1/6) = 78 1/6. Sehingga perubahan keuntungan = 78 1/6 – 76 2/3 = 1 1/5 = 1,5. Besarnya perubahan keuntungan ini sama dengan shadow price untuk bagian assembly ditambah bagian finishing, yaitu 0,83 + 0,67 = 1,5.

Bagaimana dampak pengurangan masing-masing 1 jam kerja pada bagian assembly dan bagian finishing terhadap solusi optimal ? Untuk menjelaskan hal ini kita akan gunakan kembali contoh Ikhwan Furniture. Perhatikan tabel 8.6 berikut ini.

Tabel 8.6 Dampak Pengurangan Satu Jam Kerja pada Bagian Assembly dan Finishing terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6 2/3	16 2/3	26 2/3	solusi lama
(-1) × (1/3)	(-1) × (-1/6)	(-1) × (-2/3)	perubahan assembly
(-1) × (-1/3)	(-1) × (2/3)	(-1) × (-1/3)	perubahan finishing
6 2/3	16 1/6	27 2/3	solusi baru

Dari tabel 8.6 terlihat bahwa dengan adanya pengurangan masing-masing 1 jam kerja pada bagian assembly dan finishing akan menyebabkan jumlah C (kursi) yang diproduksi tetap yaitu 6 2/3 unit sedangkan jumlah rak buku yang diproduksi turun menjadi 16 1/6 unit, dan waktu yang tersisa di bagian packing adalah 27 2/3 jam. Sedangkan keuntungan yang diperoleh pada tingkat produksi tersebut adalah = (4 x 6 2/3) + (3 x 16 1/6) = 75 1/6. Sehingga perubahan keuntungan = 75 1/6 – 76 2/3 = -1,5 . Besarnya penurunan keuntungan ini sama dengan shadow price untuk bagian assembly ditambah bagian finishing, yaitu -0,83 - 0,67 = -1,5.

Apa yang terjadi jika bagian assembly menaikkan jam kerja sebesar 10 jam, sedangkan bagian finishing jam kerjanya berkurang sebesar 5 jam. Bagaimana dampak perubahan ini terhadap nilai optimal basic variabel serta nilai optimal fungsi tujuan? Perhatikan tabel 8.7 berikut ini.

Tabel 8.7 Dampak Penambahan 10 Jam Kerja pada Bagian Assembly dan Pengurangan sebesar 5 jam Kerja pada Bagian Finishing terhadap Solusi Optimal

C	B	S3	
6 2/3	16 2/3	26 2/3	solusi lama
(10) × (1/3)	(10) × (-1/6)	(10) × (-2/3)	perubahan assembly
(-5) × (-1/3)	(-5) × (2/3)	(-5) × (-1/3)	perubahan finishing
11 2/3	11 2/3	21 2/3	solusi baru

Untuk menghitung dampak penambahan 10 jam kerja pada bagian assembly kita tinggal mengalikan change vector bagian assembly (kolom S1) dengan besarnya perubahan yaitu 10, sedangkan untuk menghitung dampak penurunan 5 jam kerja pada bagian finishing kita tinggal mengalikan change vector bagian finishing (kolom S2) dengan besarnya perubahan yaitu minus 5 (-5). Dampak perubahan jam kerja pada bagian *assembly* dan *finishing* secara simultan terhadap nilai optimal basic variable dapat dilihat pada baris kelima tabel 8.7. Dari tabel tersebut terlihat bahwa jumlah C (kursi) yang diproduksi naik menjadi 11 2/3 unit, jumlah rak buku turun menjadi 11 2/3 unit sedangkan jam kerja dibagian packing yang tersisa tinggal 21 2/3 jam. Dengan demikian keuntungan perusahaan akan menjadi = (4 x 11 2/3) + (3 x 11 2/3) = 81 2/3. Sehingga perubahan keuntungan = 81 2/3 – 76 2/3 = 5 . Besarnya kenaikkan keuntungan ini sama dengan 10 kali *shadow price* untuk bagian *assembly* dikurangi 5 kali shadow price bagian finishing (karena jam kerja bagian finishing berkurang) atau = (10 x 5/6) + (-5 x 2/3) = 30/6 = 5.

E. Rentang Perubahan Sisi Kanan Fungsi Kendala Agar Solusi Masih Tetap Optimal

Sejauh ini yang telah kita bicarakan adalah dampak adanya perubahan sisi kanan fungsi kendala baik secara parsial maupun simultan terhadap nilai optimal basic variable dan fungsi tujuan. Namun sampai seberapa besar kapasitas fungsi kendala tersebut boleh berubah? Artinya jika perusahaan terpakasa memberlakukan jam lembur bagi karyawannya atau mempekerjakan karyawan paruh waktu, seberapa besar perusahaan boleh menambah jam kerja agar solusi masih tetap optimal? Dan sebaliknya jika ada karyawan yang cuti ataupun sakit yang berdampak pada pengurangan jam kerja, sampai seberapa besar jam kerja ini boleh berkurang sehingga solusi masih tetap optimal?

Untuk menjawab beberapa pertanyaan diatas kita perlu mengetahui rentang perubahan sisi kanan fungsi kendala. Sebagai contoh akan kita bahas kembali kasus Ikhwan Furniture yang tabel optimalnya tampak pada tabel 8.1. Misalnya sampai seberapa besar penambahan atau pun pengurangan pada bagian *assembly* agar solusi masih tetap optimal?

Perhatikan tabel 8.8 dibawah ini. Informasi yang digunakan pada tabel 8.8 ini berasal dari tabel 8.1 topik 1 bab 8. Kolom pertama adalah variabel yang berada pada kolom product mix, kolom kedua adalah angka-angka yang berada pada kolom kuantitas, kolom ketiga berisi change vector pada kolom S1 (karena yang kita analisa bagian *assembly*).

Tabel 8.8 Rentang Perubahan Bagian Assembly

	Quantity	Kolom S1	Quantity/S1		
C	6,67	0,33	6,67/0,33	20	positif terkecil
B	16,67	-0,17	16,67/-0,17	-100	
S3	26,67	-0,67	26,67/-0,67	-40	negatif terkecil

Dari tabel 8.8 di atas angka positif terkecil (20) merupakan besarnya jam kerja pada bagian assembly yang dapat diturunkan. Sedangkan angka negatif terkecil (-40) adalah besarnya jam kerja pada bagian assembly yang dapat ditambah. Sehingga batas terendah jam kerja bagian assembly adalah 40, yaitu (60 – 20). dan batas tertingginya adalah 100, yaitu (60 + 40). Cara yang sama bisa digunakan untuk mengetahui rentang perubahan pada bagian lainnya.

Untuk mengetahui rentang perubahan bagian finishing, kita perlu mengetahui hasil bagi antara angka yang berada pada kolom kuantitas dengan change vector bagian finishing yaitu S2. kemudian kita pilih hasil bagi positif terkecil untuk menentukan besarnya jam kerja yang boleh diturunkan serta hasil bagi negatif terkecil untuk menentukan besarnya maksimum penambahan jam kerja di bagian finishing. Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel 8.9 berikut ini.

Tabel 8.9 Rentang Perubahan Bagian Assembly

	Quantity	Kolom S2	Quantity/S2		
C	6,67	-0,33	6,67/-0,33	-20	Negatif terkecil
B	16,67	0,67	16,67/0,67	25	Positif terkecil
S3	26,67	-0,33	26,67/-0,33	-80	

Dari tabel 8.9 dapat disimpulkan bahwa jumlah jam kerja di bagian finishing boleh ditambah maksimum 20 jam dan dikurangi maksimum sebesar 25 jam. Sehinga rentang perubahan jam kerja di bagian finishing adalah antara (40-25) sampai dengan (40+20) atau antara 15 jam – 60 jam. Artinya jam kerja di bagian assembly boleh ditambah hingga 60 jam kerja atau dikurangi hingga 15 jam kerja.

Ringkasan

7

Dapak perubahan secara simultan sisi kanan fungsi kendala terhadap nilai optimal basic variable dapat dihitung dengan mengalikan change vector dengan besarnya perubahan sisi kanan fungsi kendala yang bersesuaian.

Besarnya rentang perubahan sisi kanan fungsi kendala ditentukan dengan membagi angka pada kolom kuantitas dengan change vector untuk kendala yang sedang dianalisa. Hasil bagi negatif terkecil menunjukkan besarnya penambahan jam kerja maksimum yang diperkenankan agar solusi masih tetap optimal, sedangkan hasil bagi positif terkecil menunjukkan besarnya pengurangan jam kerja maksimum yang diperkenankan agar solusi masih tetap optimal.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1. Bagaimana cara menghitung besarnya dampak perubahan secara simultan sisi kanan fungsi kendala terhadap nilai *optimal basic variabel* ?
2. Bagaimana cara menghitung besarnya dampak perubahan secara simultan sisi kanan fungsi kendala terhadap nilai optimal fungsi tujuan ?
3. Bagaimana cara menentukan batas maksimum penambahan jam kerja di suatu departemen (suatu kendala) agar solusi masih tetap optimal ?
4. Bagaimana cara menentukan batas maksimum pengurangan jam kerja di suatu departemen (suatu kendala) agar solusi masih tetap optimal ?
5.

Pilih salah satu jawaban yang paling tepat dari beberapa alternatif jawaban yang disediakan !

Berikut adalah formulasi LP dari suatu permasalahan maksimisasi

Fungsi Tujuan Max $Z = 2B + 5M + 8P$

Fungsi Kendala

$$6B + 8M + 4P \leq 96$$
$$2B + M + 2P \leq 40$$
$$5B + 3M + 2P \leq 60$$
$$B, M, P \geq 0$$

Tabel optimal dari permasalahan di atas adalah :

Product Mix	Cj	2 B	5 M	8 P	0 S1	0 S2	0 S3	Kuantitas
M	5	1/3	1	0	1/6	-1/3	0	8/3
P	8	5/6	0	1	-1/12	2/3	0	56/3
S3	0	7/3	0	0	-1/3	-1/3	1	44/3
	Zj	50/6	5	8	1/6	11/3	0	488/3
	Cj-Zj	-19/3	0	0	-1/6	-11/3	0	

Dengan menggunakan table di atas kerjakan soal berikut ini :

1) Jika kapasitas kendala 1 dan 2 masing-masing dinaikkan 1 unit secara simultan maka jumlah M yang diproduksi akan

A. naik sebesar 1/6

B. turun sebesar 1/6

C. naik sebesar 15/6

D. turun sebesar 15/6

2) Jika kapasitas kendala 1 dan 2 masing-masing dinaikkan 1 unit secara simultan maka jumlah P yang diproduksi akan

A. turun sebesar 1/12

B. naik sebesar 2/3

C. turun sebesar 7/12

D. naik sebesar 7/12

3) Jika kapasitas kendala 1 dinaikkan 1 unit sedangkan kapasitas kendala 2 diturunkan 1 unit secara simultan maka jumlah M yang diproduksi akan

A. naik sebesar 1/6

B. turun sebesar ½

C. naik sebesar ½

D. turun sebesar 1/6

DAFTAR PUTAKA

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab X

Transportasi

Transportasi

FT.Minimisasi D =S

FT.Minimisasi D =S

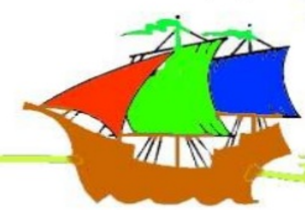
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear



TRANSPORTASI: FUNGSI TUJUAN MINIMISASI, KASUS D = S

A. Pendahuluan

Metode Transportasi juga bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan liner programming. Tujuan dari metode transportasi adalah menentukan pola pengiriman yang paling baik dari beberapa sumber (*supply*) ke beberapa tujuan (demand) sehingga meminimalkan total biaya produksi dan transportasi. Salah satu fungsi dalam dunia usaha adalah guna tempat. Panen padi yang melimpah di Pulau Buru kehilangan nilai ekonomisnya karena kapal jarang merapat di Pulau Buru untuk mengangkut hasil bumi ke Ambon dan sekitarnya yang membutuhkan. Bawang merah yang melimpah di Brebes juga perlu diangkut ke kota-kota lain agar lebih bermanfaat. Dalam hal ini alat transportasi merupakan fungsi yang menambah nilai pada hasil bumi tersebut.

Manajemen Operasi bertugas untuk memilih sarana dan sistem transportasi yang paling efisien. Cara penyelesaian kasus semacam ini dikenal dengan metode transportasi.

Misalnya perusahaan memiliki dua pabrik (sumber) dan tiga gudang (tujuan). Dengan metode transportasi, kasus semacam ini bisa disederhanakan sebagaimana tampak pada matriks 10.1.

Matriks 6.1. Metode Transportasi

Ke / Dari	G1	G2	G3	Kapasitas Pabrik
P1	C11 X11	C12 X12	C13 X13	a1
P2	C21 X21	C22 X22	C23 X23	a2
Kapasitas Gudang	b1	b2	b3	

P : Pabrik

G: Gudang

Xij: jumlah barang yang dikirim dari Pi ke Gj

Cij: biaya pengiriman per unit dari Pi ke Gj

m: jumlah pabrik

n: jumlah gudang

a: kapasitas Pabrik

b: kapasitas Gudang

$$\boxed{\text{Total biaya} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_j}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i}$$

Penyelesaian dengan program linear

Fungsi tujuan (objective function)

Minimalisasi biaya (minimize cost):

C11 X11 + C12 X12 + C13 X13 + C21 X21 + C22 X22 + C23 X23 + ... + Cmn Xmn

Tergantung pada kendala-kendala

(Subject to the constraints)

$$X11 + X12 + X13 = a1$$

$$X21 + X22 + X23 = a2$$

$$X11 + X21 = b1$$

$$X12 + X22 = b2$$

$$X13 + X23 = b3$$

dan

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i= 1, 2,..., m; \; j= 1, 2, 3, ..., n)$$

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat:

1. Memahami permasalahan penentuan lokasi dengan metode transportasi
2. Menyelesaikan permasalahan transportasi
3. Memahami tentang indeks
4. Merumuskan permasalahan transportasi dengan linear programming

Membuat Tabel Awal dengan Northwest Corner dan Least Cost

B. Membuat Tabel Awal Transportasi Dengan Northwest Corner Rule

Tujuan teknik transportasi adalah menentukan cara pengiriman barang yang paling baik dari beberapa pemasok menuju pada beberapa daerah pelanggan sehingga meminimalkan biaya produksi dan transportasi. Biasanya dijumpai kapasitas produksi untuk masing-masing pemasok dan jumlah permintaan untuk masing-masing daerah. Dalam teknik transportasi perlu ditentukan terlebih dahulu kapasitas untuk tiap pabrik, keperluan dan daya tampung untuk masing-masing gudang, dan biaya pengiriman dari setiap sumber menuju masing-masing tujuan.

Matriks 10.2 menggambarkan biaya pengiriman per unit dari kota asal (Pabrik) ke kota tujuan (Gudang). Dalam kasus ini, kota asal adalah Yogya, Malang, dan Denpasar. Sedang kota tujuan adalah Jakarta, Semarang, dan Surabaya. Biaya pengiriman barang per unit dari Yogya ke Jakarta adalah 5, dari Yogya ke Semarang adalah 4 dan dari Yogya ke Surabaya adalah 3, dan seterusnya.

Matriks 10. 2 Informasi Biaya Transportasi dari Kota Asal ke Kota Tujuan

ke Dari	Jakarta	Semarang	Surabaya	daya tampung pabrik
Yogya	5	4	3	100
Malang	8	4	3	300
Denpasar	9	7	5	300
Daya tampung gudang	300	200	200	

Yang menjadi kendala dalam kasus transportasi adalah kapasitas pabrik dan kapasitas gudang. Daya tampung gudang kota Jakarta adalah 300, Semarang adalah 200, dan Surabaya 200. Kapasitas pabrik di kota Yogya adalah 100, Malang adalah 300, dan Denpasar adalah 300. Kita harus mendistribusikan barang dari pabrik ke gudang dengan biaya yang paling murah.

Dari data tersebut bisa kita buat matriks transportasi. Tujuan pembuatan matriks adalah meringkas dan menyajikan dengan jelas data yang ada.

Permasalahan distribusi barang tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode Northwest Corner Rule, yaitu barang dari kota yang terletak pada baris paling atas, dikirim ke kota tujuan pada kolom paling kiri. Langkah-langkah berikut perlu diperhatikan dalam menjalankan aturan pojok kiri atas (Northwest Corner Rule).

Dimulai dari kotak pojok kiri atas.

1. perhatikan kapasitas pabrik dari masing-masing baris.

2. kaitkan dengan permintaan masing-masing gudang untuk setiap kolom.
3. Teliti kembali apakah ada kesesuaian antara persediaan dan permintaan.

Kapasitas pabrik Yogya adalah 100. Kebutuhan gudang Jakarta adalah 300. Oleh karena itu, untuk sementara seluruh hasil produksi dari Yogya dikirim ke Jakarta. Karena daya tampung gudang Jakarta adalah 300. Sementara ini baru mendapat kiriman dari Yogya 100 unit, maka masih terdapat kekurangan sebesar 300 – 100 = 200 unit. Kekurangan ini diambilkan dari pabrik berikutnya, yaitu Malang. Kapasitas pabrik di Malang adalah 300. Jakarta masih kekurangan 200. Maka 200 unit dari Malang dikirim ke Jakarta, sedangkan sisanya (100) dikirim ke kota tujuan berikut, yaitu Semarang. Kapasitas gudang di Semarang adalah 200. Baru mendapat kiriman dari Malang sebesar 100 unit. Perlu adanya kiriman tambahan dari kota berikut, yaitu Denpasar sebesar 100. Mengingat kapasitas pabrik Denpasar adalah 300, dan baru terpakai 100 yang dikirim ke Semarang, maka masih tersisa 200 untuk dikirim ke Surabaya. Jumlah ini sesuai dengan daya tampung gudang di Surabaya. Oleh karena itu kasus ini dikenal Demand = Supply (D = S).

Matriks 10. 3 Penyebaran dengan Northwest Corner Rule

ke / dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 100	4	3	100
(E) Malang	8 200	4 100	3	300
(F) Denpasar	9	7 100	5 200	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

Berdasarkan penyebaran dengan menggunakan Northwest Corner Rule tersebut di atas, perlu diadakan kalkulasi biaya pengiriman. Perhitungan kalkulasi biaya terlihat pada Tabel 10.1, dimana total biaya pengiriman adalah sebesar 4.200.

Tabel 10. 1. Kalkulasi Biaya Berdasarkan Penyeberan dengan Northwest Corner Rule

Dari	Ke	Jumlah Dikirim	Biaya per Unit	Total Biaya
D	A	100	5	500
E	A	200	8	1600
E	B	100	4	400
F	B	100	7	700
F	C	200	5	1000
			TOTAL	4200

C. Membuat Tabel Awal Dengan The Least Cost Rule

The least-cost method berusaha mencari solusi awal yang lebih baik, yaitu dengan memusatkan perhatian pada biaya pengiriman yang paling murah. Adapun langkah-langkah penerapan the least-cost method adalah sebagai berikut.

1. Biaya D – C dan E – C adalah biaya yang terendah dari seluruh matriks ($3). Untuk sementara kita alokasikan D ke C. Karena kapasitas C 200 dan kapasitas D hanya 100, maka masih kurang 100. Karena kapasitas Pabrik D sudah terpakai semua maka D – A dan D – B kita silang.
2. Biaya terendah dari kota yang belum tersilang adalah E – C. Kita alokasikan dari E ke C sebesar 100 untuk memenuhi kebutuhan kapasitas gudang C. Dan kota F – C kita silang, karena tidak memerlukan pengiriman lagi.
3. Dari empat kotak kosong yang memiliki biaya yang terendah adalah E – B ($4). Dari E kita kirim 200 unit ke B. Dan tinggal satu kota tujuan lagi yaitu A. Seluruh kapasitas F (300 unit) kita kirim ke A.

Matriks 10. 4 Transportasi dengan The Least Cost Rule

ke / dari	(A) Jakarta		(B) Semarang		(C) Surabaya		Kap. Pabrik
		5		4		3	
(D) Jogya					100		100
		8		4		3	
(E) Malang			200		100		300
		9		7		5	
(F) Denpasar	300						300
Kap. Gudang	300		200		200		700

Perhitungan total biaya pengiriman dengan menggunakan the least cost method terlihat pada tabel 6. 2. Dengan menggunakan biaya yang terkecil diperoleh solusi yang lebih baik (4100) dibandingkan dengan menggunakan the northwest corner rule (4200).

Tabel 10. 2 Total biaya dengan least-cost method

Dari	Ke	Jumlah	Biaya Satuan	Total
D	C	100	3	300
E	C	100	3	300
E	B	200	4	800
F	A	300	9	2700
				4100

Ringkasan

The northwest corner rule diterapkan pada metode transportasi dengan mengirimkan barang dari kota asal pada baris paling atas ke kota tujuan pada kolom paling kiri. Dengan menggunakan the least cost method, pengiriman barang dimulai pada biaya yang terendah. Cara ini memberikan solusi yang lebih murah dibandingkan dengan menggunakan *the northwest corner rule*.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1. Jelaskan bahwa metode transportasi juga merupakan Linear Programming.
2. Bagaimana metode northwest corner rule diterapkan pada metode transportasi?
3. Bagaimana metode least cost diterapkan pada metode transportasi?
4. Mengapa northwest corner rule kurang peka terhadap biaya?

DAFTAR PUTAKA

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab XI

Transportasi Stepping Stone

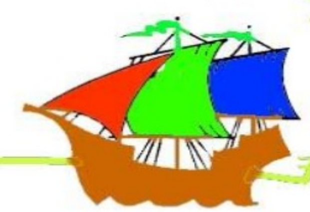
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear



STEPPING STONE

A. The Stepping-Stone Method

The Stepping-Stone Method merupakan cara merubah penyelesaian awal pada pemecahan yang optimal. Cara ini digunakan untuk mengevaluasi biaya transportasi dengan merubah rute yang belum terpakai.

1. (*unused square*) Pilihlah kotak yang belum terpakai.
2. Berawal dari kotak ini, lacaklah ke kotak awal dengan melewati kotak yang sekarang terpakai.
3. Berilah tanda plus pada kotak yang tak terpakai, dan berilah tanda minus pada kotak yang terpakai.
4. Buatlah indeks dengan menambah biaya pada tanda plus dan mengurangi biaya pada tanda minus.

Sebagaimana tampak pada Matriks 11. 5, kita melakukan uji coba mengirim 1 unit dari pabrik Yogya ke Semarang. Akibatnya Semarang kelebihan 1 unit dan Jakarta kekurangan satu unit. Agar distribusi tetap seimbang sesuai kapasitas masing-masing, 200 unit yang dikirim dari Malang ke Semarang dikurangi 1 unit dan dikirim ke Jakarta. Uji coba ini harus tetap menjaga kapasitas pabrik dan gudang sehingga menjadi jalur tertutup (*closed path*).

Dengan adanya uji coba pengiriman dari Yogya ke Semarang, terjadi perubahan biaya yang bisa dihitung dengan menggunakan angka indeks. Angka indeks dihitung berdasarkan penambahan atau pengurangan 1 unit dikalikan dengan biaya pengiriman per unit. Bila angka indeks positif, berarti terjadi penambahan biaya. Sebaliknya bila angka indeks negatif, berarti akan terjadi pengurangan biaya pada saat kita memindahkan distribusi dari kota asal ke kota tujuan yang berindeks negatif tersebut.

Matriks 11. 5 Indeks dari Jogya ke Semarang

Ke / dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 **100 - 1**	4 **+1**	3	100
(E) Malang	8 **200 + 1**	4 **100** $_{-1}$	3	300
(F) Denpasar	9	7 100	5 200	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

Indeks dari Jogya ke Semarang (D – A): (1*4)-(1*5)+(1*8)-(1*4) = 3

Berarti terjadi kenaikan biaya sebesar Rp3,- untuk perubahan pengiriman dari Jogya ke Semarang. Dengan cara yang sama kita bisa menghitung semua angka indeks pada kota yang kosong.

Indeks Dari Jogya ke Surabaya (D – C): 3-5+8-4+7-5 = 4. untuk memudahkan perhitungan ini lihat Matriks 6. 6.

Indeks dari Malang ke Surabaya: 3-4+7-5 = 1

Indeks dari Ujungpandang ke Jakarta: 9-7+4-8 = -2

Karena indeks yang terakhir negatif, bisa diperoleh penghematan beaya dengan memanfaatkan rute yang belum terpakai dari Yogya ke Jakarta.

Matriks 11. 6 Indeks dari Jogya ke Surabaya

ke / dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 100 -1	4	3 +1	100
(E) Malang	8 200 +1	4 100 -1	3	300
(F) Denpasar	9	7 100 +1	5 200 -1	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

B. Melakukan Perbaikan Tabel

Berdasarkan hasil perhitungan indeks pada sub bab A, diperoleh hasil -2 untuk pengiriman dari Denpasar ke Jakarta, maka pada matriks 6 dicoba 100 unit dikirimkan dari Denpasar ke Jakarta. Dampak dari ujicoba tersebut adalah bahwa pengiriman dari Malang ke Jakarta harus dikurangi 100 dan dialihkan ke Semarang. Untuk memastikan apakah perubahan tersebut akan menurunkan total biaya pengiriman, perlu kita hitung kembali total biaya pengiriman dengan distribusi yang baru.

Matriks 11. 7 Uji Coba Pengiriman dari Denpasar ke Jakarta

ke / Dari	Jkt	Smg	Sby	Kapasitas Pabrik
Yogya	5 100	4	3	100
Malang	8 100	4 200	3	300
Denpasar	9 100	7	5 200	300
Kapasitas Gudang	300	200	200	

Tabel 6. 3. Total Biaya Uji Coba Pertama

Dari	Ke	Jumlah	Biaya Satuan	Total
D	A	100	5	500
E	A	100	8	800
E	B	200	4	800
F	A	100	9	900
F	C	200	5	1.000
			Total	4.000

Dengan mengalikan jumlah yang dikirim dari sumber ke tujuan pada Matriks 6.7, diperoleh total biaya pengiriman dengan distribusi yang baru sebesar 4.000. Total biaya pengiriman berkurang (100 unit x 2) = Rp.200,-, menjadi = Rp.4000,-

Ringkasan

Modi method digunakan untuk menguji apakah suatu matriks sudah optimal atau belum. Angka indeks positif menunjukkan terjadinya penambahan biaya apabila satu unit produk dikirim ke kotak kosong tersebut. Angka indeks negatif menunjukkan bahwa akan terjadi pengurangan biaya apabila satu unit produk dikirim ke kotak yang berindeks negatif tersebut.

39

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1. Jelaskan langkah-langkah metode transportasi dengan northwest corner rule.
2. Jelaskan langkah-langkah metode transportasi dengan menggunakan least cost method
3. Jelaskan perbedaan antara northwest corner rule dengan least cost method.

DAFTAR PUTAKA

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab XII

Transportasi Mode VAM

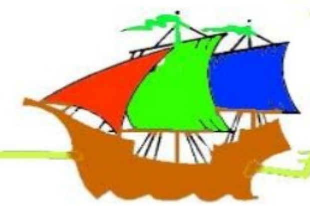
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear



TRANSPORTASI: FUNGSI TUJUAN MINIMISASI, KASUS D = S PENYELESAIAN DENGAN VAM

Pendahuluan

Metode Transportasi sebagaimana dibicarakan pada bab 11, diselesaikan dengan menggunakan Norhwest corner rule. Keuntungan menggunakan northwest corner rule adalah bahwa metode ini sistematik dan mudah diterapkan. Namun demikian kelemahan metode ini adalah bahwa tidak sensitif terhadap biaya. Karena tujuan metode transportasi adalah meminimumkan biaya, kita bisa menggunakan opportunity cost dengan memilih biaya per unit yang paling rendah.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat:

1. Memahami kelebihan VAM
2. Menyelesaikan permasalahan transportasi dengan VAM
3. Menghitung Indeks dengan menggunakan Modi Method
4. Membuat Matriks pengembangan dengan Modi Method

Menghitung Biaya Peluang dengan VAM dan Melakukan Improvement

A. Menghitung Biaya Peluang Dengan VAM

Vogel Approximation Method (VAM) yang dikembangkan oleh Vogel pada prinsipnya mencari opportunity cost (biaya peluang). Untuk setiap baris dan kolom, dibandingkan dan dihitung selisih antara biaya terendah dengan yang lebih tinggi. Pengiriman dilakukan dari kota asal ke kota tujuan dengan memilih selisih biaya terbesar dan terendah. Selisih biaya dihitung dengan cara mengurangkan biaya terendah pada biaya satu tingkat di atasnya.

Matriks 12. 1 Data Biaya Pengiriman Per Unit, Kapasitas Pabrik dan Kapasitas Gudang

ke / dari	G1	G2	G3	G4	Kap. Pabrik
PA	27	23	31	69	150
PB	10	45	40	32	40
PC	30	54	35	57	80
Kap. Gudang	90	70	50	60	270

Matriks I menunjukkan biaya transportasi, kapasitas pabrik dan kapasitas gudang. Berdasarkan tabel tersebut Vogel membuat perhitungan untuk masing-masing baris dan kolom perbedaan biaya yang termurah dengan biaya yang lebih mahal.

Pada baris PA, biaya pengiriman terendah adalah dari PA ke G2 (23). Biaya terendah berikutnya adalah dari PA ke G1 (27). Biaya peluang pada PA adalah 4 (27 – 23). Pada baris PB, biaya pengiriman terendah adalah dari PB ke G1 (10). Biaya terendah berikutnya adalah dari PB ke G4 (32). Biaya peluang pada PB adalah 22 (32 – 10). Selisih biaya menunjukkan penghematan yang bisa dilakukan pada baris atau kolom. Semua perhitungan selisih biaya pada baris dan kolom terlihat pada Matrik 12.2.

Matriks 7.2. Biaya Peluang Baris dan Kolom

ke / dari	G1	G2	G3	G4	Kap. Pabrik	
PA	27	23	31	69	150	4
PB	10	45	40	32 **40**	40	22
PC	30	54	35	57	80	5
Kap. Gudang	90	70	50	60	270	
	17	22	4	25		

Dari seluruh perhitungan tersebut terlihat bahwa selisih terbesar terdapat pada kolom G4 (25). Hal itu berarti perusahaan akan menghemat 25 satuan biaya kalau mengirim pertama ke kolom G4. pada kolom G4 tersebut kita pilih kotak dengan biaya terendah dalam hal ini adalah baris PB. Sebagai percobaan awal semua kebutuhan G4 dikirim dari PB sejumlah 40 unit.

Untuk mengisi kotak yang lain, diulangi cara yang sama, yaitu dengan menghitung biaya peluang berdasarkan baris dan kolom, kemudian pilih biaya peluang terbesar dan alokasikan pada kotak dengan biaya terendah, dengan mempertimbangkan supply dan demand.

B. Mengisi Kotak Lain Pada VAM

Dalam permasalahan transportasi, Opportunity cost (biaya peluang) antara baris supply dan kolom demand dimengerti sebagai selisih antara biaya terendah dan biaya terendah berikutnya. Langkah-langkah Vogel Approximation method adalah sebagai berikut.

1. pada setiap baris dan kolom, pilih biaya terendah dan alternatif biaya terendah berikutnya pada kotak yang belum terpakai. Selisih antara biaya terendah dan altiernatif biaya terendah berikutnya merupakan opportunity cost (biaya peluang) bagi baris atau kolom.
2. pilihlah opportunity cost yang tertinggi di antara baris dan kolom
3. alokasikan sebanyak mungkin unit pada baris atau kolom pada kotak dengan biaya terendah.

Untuk mengisi kotak kosong yang lain, dihitung kembali biaya peluang berdasarkan baris dan kolom. Baris PB yang kapasitasnya sudah habis digunakan, tidak diperhitungkan dalam proses perhitungan biaya peluang. Perhitungan biaya peluang berdasarkan baris dan kolom dapat dilihat pada Matriks 7.3.

Dari perhitungan biaya peluang tersebut, terlihat bahwa selisih biaya terbesar terletak pada kolom G2, yaitu sebesar 31. Oleh karena itu kita akan mengalokasikan pada kolom G2 dengan memilih kotak dengan biaya terendah, yaitu kotak PA – G2. Untuk menentukan berapa yang harus dialokasikan ke kotak PA –G2, perlu mempertimbangkan kapasitas Pabrik PA dan Gudang G2. karena permintaan pada G2 70 sementara kapasitas Pabrik PA 150, maka kita alokasikan sebesar 70. Sehingga kapasitas Pabrik PA masih tersisa 80 unit yang bisa dialokasikan ke gudang lainnya.

Matriks 12. 3. Biaya Peluang terbesar pada Solusi Awal

ke dari	G1	G2	G3	G4	Kap. Pabrik	
PA	27	23 **70**	31	69	150	4
PB	10	45	40	32 **40**	40	
PC	30	54	35	57	80	5
Kap. Gudang	90	70	50	60	270	
	3	31	4			

Perhitungan biaya peluang (*opportunity cost*) pada baris dan kolom tersebut diulangi lagi untuk baris dan kolom yang masih terdapat kapasitas sisa. Distribusi akhir untuk kasus tersebut terlihat pada Matriks 12. 4 dan total biaya minimum terlihat pada Tabel 12.1, yaitu sebesar 8240.

Matriks 12.4. Distribusi Akhir dengan VAM

ke dari	G1	G2	G3	G4	Kap. Pabrik
PA	27 **80**	23 **70**	31	69	150
PB	10	45	40	32 **40**	40
PC	30 **10**	54	35 **50**	57 **20**	80
Kap. Gudang	90	70	50	60	270

Tabel 12.1. Total Biaya dengan VAM

dari	ke	biaya per unit	jumlah dikirim	total
PA	G1	27	80	2160
PA	G2	23	70	1610
PB	G4	32	40	1280
PC	G1	30	10	300
PC	G3	35	50	1750
PC	G4	57	20	1140
			270	8240

Ringkasan

Vogel Approximation Method mendasarkan pada konsep opportunity cost (selisih antara biaya terendah dengan biaya satu tingkat di atasnya), untuk setiap baris dan kolom. Untuk melakukan alokasi ke setiap kotak dipilih biaya peluang terbesar, kemudian pilih kotak yang mempunyai biaya terendah.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1. Jelaskan perbedaan metode VAM dan least cost.
2. bagaimana metode VAM diterapkan pada metode transportasi?
3. Apa yang dimaksud dengan opportunity cost sebagaimana diterapkan VAM pada kasus transportasi

DAFTAR PUTAKA

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab XIII

Transportasi

Transportasi

MODI

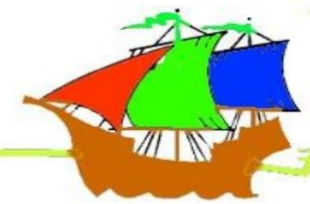
Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

Indikator:

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear



TRANSPORTASI: FUNGSI TUJUAN MINIMISASI, KASUS D = S PENYELESAIAN DENGAN MODI METHODE

A. The MODI Method

MODI (*modified distribution*) *method* merupakan perkembangan dari model indeks pada kotak yang belum terpakai. Penerapan metode MODI diawali dengan menggunakan northwest corner rule (lihat Matriks 7.6). Kita harus menghitung nilai dari masing-masing baris (R1, R2 , R3) dan masing-masing kolom (K1, K2, K3). Dalam MODI method, indeks pengembangan dapat dihitung tanpa menggambar jalur tertutup (*closed path*).

Dalam modi method, R menjadi simbol baris dan K menjadi simbol kolom.

Ri = nilai pada baris ke i

Kj = nilai pada kolom ke j.

Cij = biaya pada kotak ij.

Sehingga biaya pada kotak terisi (stone square) ij adalah sebagai berikut

Cij = Ri + Kj

Prosedur umum untuk menyelesaikan MODI method adalah bahwa R1 = 0. Hal ini bisa dibenarkan karena seluruh proses bersifat komparatif. Dengan kata lain, signifikansi nilai baris dan kolom tidak terletak pada nilai absolutnya.

Lima langkah MODI method :

1. Menghitung nilai dari masing-masing baris dan kolom; tetapi hanya kotak yang terisi ($C_{ij}= R_i + K_j$)
2. Setelah semua persamaan ditulis, tentukan $R_1 = 0$
3. Selesaikan semua persamaan

4. Hitunglah indeks untuk masing-masing kotak yang tidak terpakai Indeks = $C_{ij} - R_i - K_j$
5. Pilihlah indeks dengan nilai negatif terbesar untuk kasus minimisasi.

B. Melakukan Perbaikan Tabel

Matriks 13.6 diambil dari Matriks 6.3 digunakan sebagai perhitungan dengan menggunakan Modi Method. Dengan rumus Cij = Ri + Kj, semua kotak yang terisi kita masukkan informasi yang terdapat pada tabel. Biaya dari (D) Jogya ke (A) Jakarta sebesar 5, dituliskan menjadi R1 + K1 = 5. Biaya dari (E) Malang ke (A) Jakarta sebesar 8, dituliskan menjadi R2 + K1 = 8, dan seterusnya.

Matriks 13. 6. Penyebaran dengan Northwest Corner Rule

Ke / Dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 100	4	3	100
(E) Malang	8 200	4 100	3	300
(F) Denpasar	9	7 100	5 200	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

Berdasarkan Matriks 13.6, kita dapat menentukan nilai Ri dan Kj untuk kotak terisi sebagai berikut.

$R_1 + K_1 = 5$

$R_2 + K_1 = 8$

$R_2 + K_2 = 4$

$R_3 + K_2 = 7$

$R_3 + K_3 = 5$

Sebagaimana langkah kedua dalam Modi, ditentukan bahwa R1 = 0, sehingga semua persamaan bisa diselesaikan sebagai berikut.

$R_1 = 0$

$R_1 + K_1 = 5 \quad 0 + K_1 = 5 \quad K_1 = 5$

Karena $K_1 = 5$, maka kita bisa menghitung R_2

$R_2 + K_1 = 8 \quad R_2 + 5 = 8 \quad R_2 = 3$

Karena $R_2 = 3$, kita bisa menghitung K_2

$R_2 + K_2 = 4 \quad 3 + K_2 = 4 \quad K_2 = 1$

Karena $K_2 = 1$, kita bisa menghitung R_3

$R_3 + K_2 = 7 \quad R_3 + 1 = 7 \quad R_3 = 6$

Karena $R_3 = 6$, kita bisa menghitung K_3

$R_3 + K_3 = 5 \quad 6 + K_3 = 5 \quad K_3 = -1$

Setelah kita mendapatkan nilai masing-masing Ri dan Kj, maka langkah selanjutnya adalah menghitung indeks untuk kotak yang kosong: dilakukan dengan rumus $C_{ij} - R_i - K_j$.

Perhatikan kembali Matriks 7.6. kotak kosong adalah D-B, D-C, E-C, dan F-A.

Sehingga Indeks dari Jogya ke Semarang (D-B) = $C_{12} - R_1 - K_2$

$$4 - 0 - 1 = 3$$

Indeks dari Jogya ke Surabaya (D-C) = $C_{13} - R_1 - K_3$

$$3 - 0 - (-1) = +4$$

Indeks dari Malang ke Surabaya (E- C) = $C_{23} - R_2 - K_3$

$$3 - 3 - (-1) = +1$$

Indeks dari Denpasar ke Jakarta (F-A) = $C_{31} - R_3 - K_1$

$$9 - 6 - 5 = -2$$

Dengan menggunakan Modi Method kita ketahui bahwa indeks negatif terbesar terletak pada kotak F-A atau Indeks dari Denpasar ke Jakarta = - 2. Hasil perhitungan ini sama dengan cara stepping stone sebagaimana telah dibicarakan pada bab 8 topik 2. oleh karena itu ujicoba pengembangan Matriks penyebaran juga sama dengan Matriks 13.7. sebagaimana terlihat pada Matriks 13.7. Berdasarkan Matriks 13.6 diketahui bahwa kotak yang mempunyai indeks negatif terbesar adalah F – A sehingga kita bisa membuat jalur tertutup yang dimulai dari kotak F – A dengan memberikan tanda positif kemudian ke kotak E – A, E – B, F – B. Dari jalur tertutup tersebut kotak yang mempunyai tanda negatif dan alokasi paling kecil adalah kota F – B (100). Angka ini akan kita gunakan untuk menambah kotak yang bertanda positif dan mengurangi kotak yang bertanda negatif. Hasil selengkapnya bisa dilihat pada Matriks 13.7.

Untuk perbaikan Matriks perlu diikuti langkah-langkah berikut:

1. lacak jalur tertutup (*closed path*) yang memiliki indeks negatif terbesar
2. beri tanda plus dan minus pada kotak lain dari jalur, dimulai dengan tanda plus pada kotak yang tidak terpakai.
3. kotak yang mempunyai tanda negatif dan alokasi terkecil yang terdapat pada jalur tertutup menunjukkan jumlah yang bisa dikirim pada kotak yang tidak terpakai.
4. akhirnya, indeks pengembangan bagi solusi yang baru bisa dihitung.

Matriks 13. 7. Uji Coba Pengiriman dari Denpasar ke Jakarta

Ke / dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 100	4	3	100
(E) Malang	8 100	4 200	3	300
(F) Denpasar	9 **100**	7	5 200	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

Perbaikan Matriks ini akan kita lakukan sampai diperoleh indeks bertanda positif atau nol. Untuk menguji apakah Matriks 7.7. sudah optimal atau belum akan dihitung kembali nilai R_i dan K_j untuk kotak yang kosong dengan rumus ($C_{ij} – R_i - K_j$).

$R_1 = 0$

$R_1 + K_1 = 5$ $0 + K_1 = 5$ $K_1 = 5$

Karena $K_1 = 5$, maka kita bisa menghitung R_2

$R_2 + K_1 = 8$ $R_2 + 5 = 8$ $R_2 = 3$

Karena $R_2 = 3$, kita bisa menghitung K_2

$R_2 + K_2 = 4$ $3 + K_2 = 4$ $K_2 = 1$

Karena $K_1 = 5$, kita bisa menghitung R_3

$R_3 + K_1 = 9$ $R_3 + 5 = 9$ $R_3 = 4$

Karena $R_3 = 4$, kita bisa menghitung K_3

$R_3 + K_3 = 5$ $4 + K_3 = 5$ $K_3 = 1$

Menghitung indeks pengembangan untuk kotak yang kosong:dilakukan dengan rumus $C_{ij} – R_i - K_j$

Sehingga Indeks dari Jogya ke Semarang (D-B) = $C_{12} – R_1 – K_2$

$$4 - 0 - 1 = 3$$

Indeks dari Jogya ke Surabaya (D-C) = $C_{13} - R_1 - K_3$

3 - 0 - 1 = +2

Indeks dari Malang ke Surabaya (E- C) = $C_{23} - R_2 - K_3$

3 - 0 - 1 = +2

Indeks dari Denpasar ke Semarang (F- B) = $C_{32} - R_3 - K_2$

7 - 4 - 1 = 2

Matriks 13. 8. Distribusi Minimum

ke / dari	(A) Jakarta	(B) Semarang	(C) Surabaya	Kap. Pabrik
(D) Jogya	5 **100**	4	3	100
(E) Malang	8	4 **200**	3 **100**	300
(F) Denpasar	9 **200**	7	5 **100**	300
Kap. Gudang	300	200	200	700

Seperti telah dilakukan pada Matriks 13.6, dari perhitungan indeks terlihat bahwa kotak kosong (E – C) mempunyai indeks negatif terbesar, yaitu – 1. Oleh karena itu akan kita buat closed path (jalur tertutup) yang dimulai dari kotak E – C, dengan tanda positif. Dari jalur tertutup ini kotak yang mempunyai tanda negatif dan alokasi terkecil adalah kotak E – A. Matriks yang sudah diperbaiki terlihat pada Matriks 13.8.

Untuk menguji apakah Matriks 13. 8. sudah optimal atau belum akan dihitung kembali nilai R_i dan K_j untuk kotak yang kosong dengan rumus ($C_{ij} - R_i - K_j$).

$R_1 = 0$

$R_1 + K_1 = 5 \quad 0 + K_1 = 5 \quad K_1 = 5$

Karena $K_1 = 5$, maka kita bisa menghitung R_3

$R_3 + K_1 = 9 \quad R_3 + 5 = 9 \quad R_3 = 4$

Karena $R_3 = 4$, kita bisa menghitung K_3

$R_3 + K_3 = 5 \quad 4 + K_3 = 5 \quad K_3 = 1$

Karena $K_3 = 1$, kita bisa menghitung R_2

$R_2 + K_3 = 3 \quad R_2 + 1 = 3 \quad R_3 = 2$

Karena $R_3 = 2$, kita bisa menghitung K_2

$R_3 + K_2 = 4 \quad 2 + K_2 = 4 \quad K_3 = 2$

Menghitung indeks pengembangan untuk kotak yang kosong:dilakukan dengan rumus $C_{ij} – R_i - K_j$

Sehingga Indeks dari Jogya ke Semarang (D-B) = $C_{12} – R_1 – K_2$

4 - 0 - 2 = +2

Indeks dari Jogya ke Surabaya (D-C) = $C_{13} – R_1 – K_3$

3 - 0 - 1 = +2

Indeks dari Malang ke Jakarta (E- A) = $C_{21} – R_2 – K_1$

8 - 2 - 5 = +1

Indeks dari Denpasar ke Semarang (F- B) = $C_{32} – R_3 – K_2$

7 - 4 - 2 = +1

Karena semua indeks kotak kosong bernilai positif, maka Matriks sudah optimal. Total biaya minimum sebesar 3900 sebagaimana tampak pada Tabel 13.2.

Tabel 13. 2. Total Biaya Minimum

Dari	Ke	Jumlah	Biaya Satuan	Total
(D) Jogya	(A) Jakarta	100	5	500
(E) Malang	(B) Semarang	200	4	800
(E) Malang	(C) Surabaya	100	3	300
(F) Denpasar	(A) Jakarta	200	9	1800
(F) Denpasar	(C) Surabaya	100	5	500
		700		3900

Modi method digunakan untuk menguji apakah suatu matriks transportasi sudah optimal atau belum. Angka indeks positif menunjukkan terjadinya penambahan biaya apabila satu unit produk dikirim ke kotak kosong tersebut. Angka indeks negatif menunjukkan bahwa akan terjadi pengurangan biaya apabila satu unit produk dikirim ke kotak yang berindeks negatif tersebut.

Perbaikan Matriks dilakukan dengan cara menghitung indeks kemudian pilih indeks dengan tanda negatif terbesar. Matriks dikatakan optimal bila semua indeks bernilai positif atau nol untuk fungsi tujuan minimisasi.

39

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan anda mengerjakan latihan berikut ini !

1. Jelaskan langkah-langkah modi method.
2. Bagaimana cara membuat jalur tertutup?
3. Apa kriteria suatu Matriks dengan pendekatan Modi dinyatakan optimal untuk fungsi tujuan minimisasi?

DAFTAR PUTAKA

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

Bab XIV

Aplikasi Komputer

Metode Grafik
Metode Simpleks

Standar Kompetensi:

Mahasiswa memiliki pengetahuan tentang sejarah program linear, keterampilan belajar secara mandiri dalam mempelajari masalah-masalah pemrograman linear dari kehidupan sehari-hari, dengan menekankan pada pemahaman konsep serta penguasaan dan kemahiran teknik penyelesaiannya menggunakan teori maupun paket program komputer.

8 **dikator:**

Setelah membaca bab ini, mahasiswa diharapkan dapat:

- Menjelaskan konsep dualitas
- Interpretasi ekonomis suatu masalah program linear

TRANSPORTASI: FUNGSI TUJUAN MINIMISASI, KASUS D = S PENYELESAIAN DENGAN MODI METHODE

A. Pendahuluan

45

Program POM adalah sebuah program komputer yang digunakan untuk memecahkan masalah dalam bidang produksi dan operasi yang bersifat kuantitatif. Tampilan grafis yang menarik dan kemudahan pengoperasian menjadikan POM for Windows sebagai alternatif aplikasi guna membantu pengambilan keputusan seperti misalnya menentukan kombinasi produksi yang sesuai agar memperoleh keuntungan sebesar-besarnya. Menentukan order pembelian barang agar biaya perawatan menjadi seminimal mungkin, menentukan penugasan karyawan terhadap suatu pekerjaan agar dicapai hasil yang maksimal, dan lain sebagainya.

Program ini menyediakan beberapa modul berbeda, yaitu:

1. Aggregate Planning
2. Assignment (Penugasan)
3. Balancing Assembly Line
4. Break Even/Cost-Volume Analysis
5. Decission Analysis (Pengambilan Keputusan)
6. Forecasting (Peramalan)
7. Inventory (Persediaan)
8. Job Shop Sceduling
9. Learning Curve
10. Linnier Proggraming (Pemrograman Linier)
11. Location
12. Lot Sizing
13. Material Requirements Planning
14. Operations Layout
15. Project Management (PERT/CPM)
16. Quality Control
17. Reliability
18. Simulation
19. Transportation

20. Waiting Lines (Antrian)

B. Materi Aplikasi Program Linear

Materi praktikum menggunakan POM For Windows hanya akan dibatasi hanya beberapa buah model dari 20 model yang ada, antara lain yaitu Linnier Programming, Transportation, Assignment, Inventory, Game Theory, dll.

Dalam mempelajari Riset Operasi, diperlukan model untuk penyederhanaan yang sengaja dibuat untuk mempermudah mempelajari dunia nyata yang kompleks dan hasilnyad dikembalikan ke dunia nyata kembali. Model bisa berbentuk gambar, simulator/prototype, matematis/grafik, dll. Dalam pengambilan keputusan dapat dibantu dengan banyak alat analisis. Untuk melakukan analisis diperlukan data.

C. Langkah Umum Memecahkan Masalah Program Linear

1. Siapkan formula masalahnya, semisal akan dipecahkan suatu masalah linier programming maka langkah kerjanya adalah:
   - Tentukan masalahnya apakah kasus maksimum atau minimum
   - Berapa jumlah variabel yang ada
   - Berapa jumlah batasan yang ada
2. masukkan masalah tersebut ke dalam komputer
3. lakukan pengecekan pada masalah bila terjadi kesalahan input
4. Lakukan perhitungan dan lihat hasilnya dengan menKlik **SOLVE**
5. Tampilkan hasil-hasil perhitungan
6. Simpan formulasi masalah atau datanya

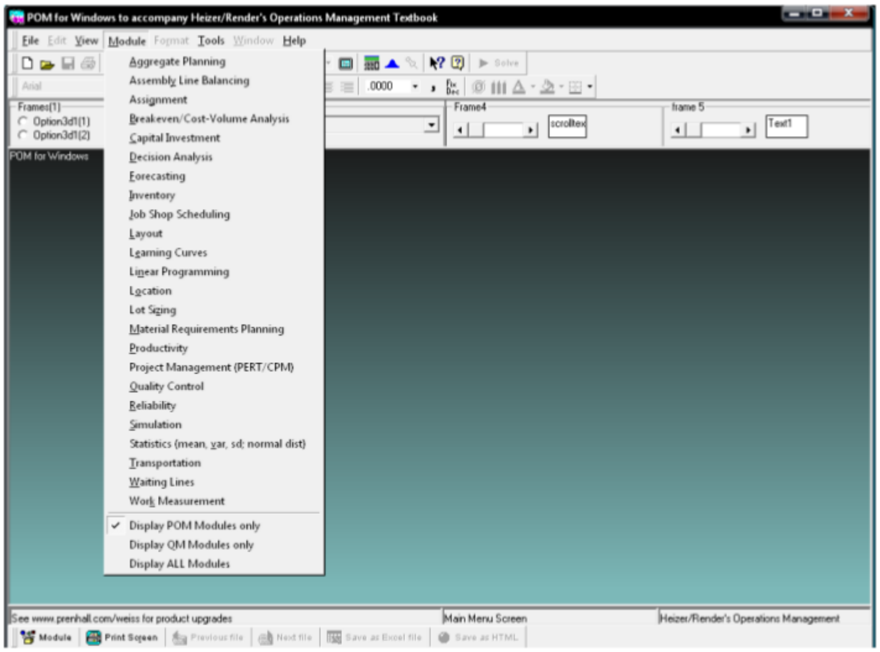
D. Menjalankan POM For Windows

✓ **Melalui *Shortcut***

Apabila ada shortcut POM for Windows maka klik 2x pada icon (Gambar) Shortcut POM for Windows.

✓ **Melalui Menu Program**

Klik start → Program → Pilih POM for Windows sehingga akan muncul tampilan berikut :



Secara garis besar layar POM for Windows terdiri atas :

1. Title Bar

Terdiri dari: The control Main Box, program name dan button untuk layar yaitu Minimize, Maximize, dan close.

2. Menu Bar

Terdiri dari: File, Edit, View, Modul, Tables, Tools, Windows, dan Help.

3. Tool Bar atau Button Bar

Terdiri dari: Command Bar, contohnya print screen dan solve, Instruction Panel, Extra Data Area, Data Table, Annotation Area, Status Panel.

E. Model Grafik

Model grafik digunakan untuk memecahkan masalah penentuan kombinasi optimum (maksimal dua variabel) guna memaksimumkan laba atau meminimumkan biaya dengan kendala tertentu.

Contoh (Maksimisasi):

Dua produk diproses berangkai menggunakan 4 mesin. Waktu setiap mesin per hari tersedia 8 jam. Waktu proses produksi dan profit sebagai berikut:

PRODUK	MESIN 1	MESIN 2	MESIN 3	MESIN 4	PROFIT
1	10 menit	6 menit	8 menit	0 menit	**Rp. 10.000**
2.	**5 menit**	**20 menit**	**15 menit**	**30 menit**	**Rp. 20.000**

Hitung jumlah produksi optimal setiap jenis produk dan keuntungan totalnya!

Penyelesaian:

Pada kasus disebutkan waktu yang tersedia adalah 8 jam sedangkan proses produksi mesin menggunakan satuan menit sehingga perlu penyesuaian satuan waktu menjadi menit sehingga diperoleh angka 8 jam x 60 menit = 480 menit

Formulasi Linier Programming:

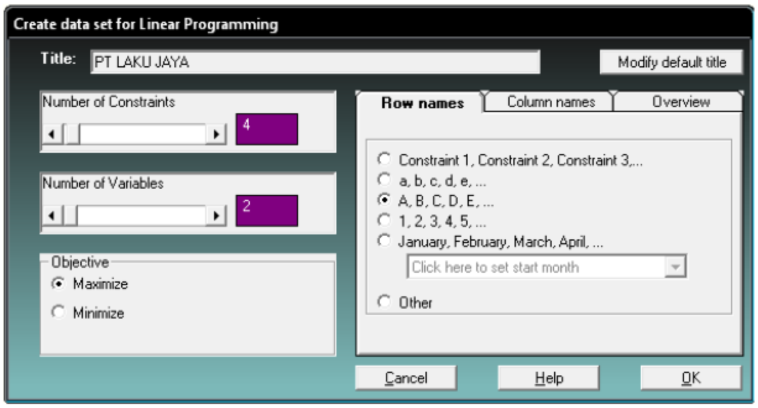
Z max = 10.000 X1 + 20.000 X2 (Fungsi tujuan)

Fungsi Kendala :

1) $10 X1 + 5 X2 \leq 480$
2) $6 X1 + 20 X2 \leq 480$
3) $8 X1 + 15 X2 \leq 480$
4) $30 X2 \leq 480$
5) $X1, X2 \geq 0$

Setelah formulasi selesai disusun maka masukkan data pada program POM for Windows dengan langkah sebagai berikut:

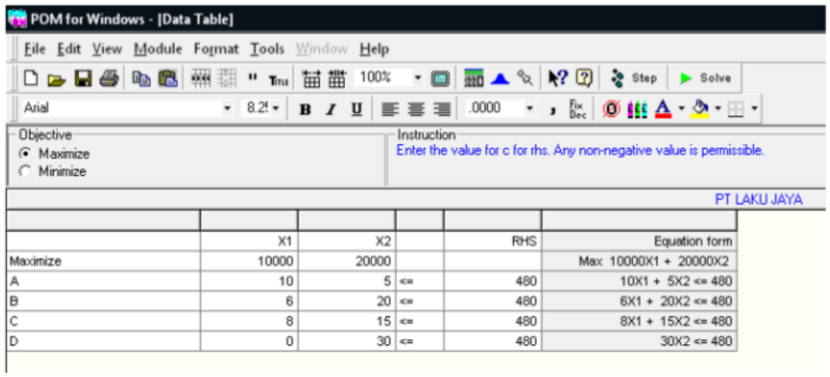
❖ Pada menu POM klik MODULE lalu pilih Linear Programming, lalu klik NEW sehingga muncul gambar berikut :



Keterangan:

- **Title** → judul kasus yang diselesaikan, misalnya PT. LAKU JAYA
- **Number of Constraint** → jumlah fungsi batasan yang ada pada kasus. Isikan 4 buah mesin untuk produksi (A,B,C,D) sebagai fungsi batasan.
- **Number of Variables** → jumlah variabel yang ada pad fungsi tujuan. Isikan 2 sesuai kasus di ata terdapat 2 produk (1,2) sebagai fungsi tujuan.
- **Objective** → tujuan pengalokasian sumber daya. Klik Maximize sesuai kasus di atas (memaksimalkan keuntungan)
- **Row Name Options** → Nama batasan yang diinginkan, misalnya A,B,C,…

❖ Klik OK sehingga muncul tampilan isian untuk memasukkan koefisien fungsi batasan dan fungsi tujuan serta kapasitas maksimum batasan pada kolom RHS (Right Hand Side) seperti berikut:



POM for Windows - [Data Table]

Objective: Maximize / Minimize

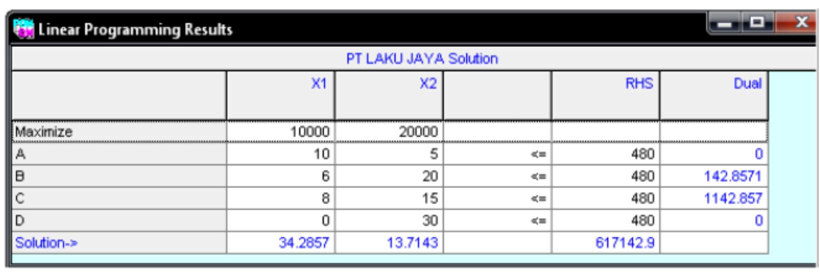
Instruction: Enter the value for c for rhs. Any non-negative value is permissible.

PT LAKU JAYA

	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	10000	20000			Max 10000X1 + 20000X2
A	10	5	<=	480	10X1 + 5X2 <= 480
B	6	20	<=	480	6X1 + 20X2 <= 480
C	8	15	<=	480	8X1 + 15X2 <= 480
D	0	30	<=	480	30X2 <= 480

❖ Klik SOLVE apabila data sudah lengkap dan benar sehingga akan tampak hasilnya.

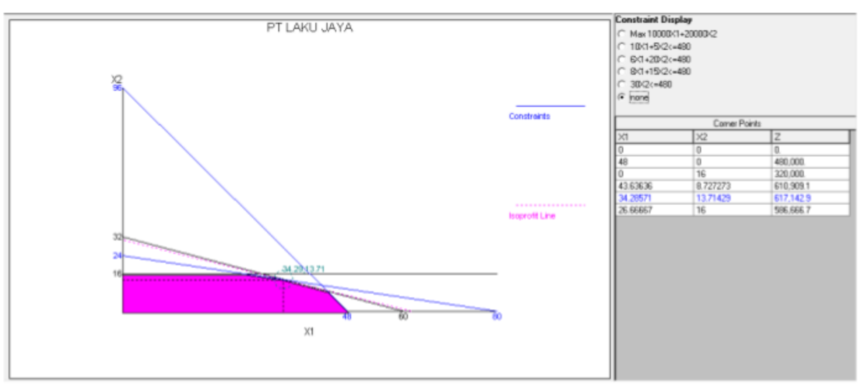
❖ Kemudian dengan klik menu Window akan tampil pilihan Linear Programming Result, Ranging, Solution List, Iterations, dan Graph seperti pada gambar berikut:



Linear Programming Results

PT LAKU JAYA Solution

	X1	X2		RHS	Dual
Maximize	10000	20000			
A	10	5	<=	480	0
B	6	20	<=	480	142.8571
C	8	15	<=	480	1142.857
D	0	30	<=	480	0
Solution->	34.2857	13.7143		617142.9	



Di bawah kolom *Constraint Display* terdapat kolom *Corner Points* yang menunjukkan hubungan antara variabel X1 dan X2 serta Z. Misalkan apabila X1 = 48 dan X2 = 0 maka Z (profit) akan bernilai 480000.

Jumlah produksi untuk produk:

1. (X1) = 34,29
2. (X2) = 13.71

Keuntungan Total : Z = Rp. 617.142,9 ,-

Catatan:

Untuk linear proggramming minimisasi prosesnya sama, hanya tinggal mengganti option *objective*-nya pada pilihan *minimize*.

Ringkasan:

Area blok (warna pink) pada grafik merupakan *Feaseble Area* yaitu daerah batas yang mungkin untuk pengalokasian sumber daya produksi yang ada dengan waktu yang tersedia. Produksi tidak boleh melebihi titik-titik yang ada pada daerah *Feaseble Area*.

Pada grafik terdapat *Isoprofit Line* yang berada pada titik (34,29:13,71) di mana garis tersebut merupakan titik koordinat maksimum produksi guna mencapai profit yang maksimal.

Pada grafik sisi kanan terdapat Kolom *Constraint Display* yang akan menunjukkan Garis dari persamaan formulasi Linear Programming yang ada apabila di-klik salah satu check-box di depannya.

Latihan

1. PT A&D menghasilkan dua jenis produk yaitu P1 dan P2, masing-masing memerlukan 2 macam bahan baku, P dan Q. Harga jual tiap satuan P1 adalah 150 dan P2 adalah 100. Bahan baku P yang tersedia adalah sebanyak 600 satuan dan Q sebanyak 1000 satuan. Satu satuan P1 memerlukan satu satuan P dan dua Satuan Q, sedang P2 memerlukan satu satuan P dan satu satuan Q. Persoalannya adalah alokasi bahan P dan Q semaksimal mungkin untuk menentukan jumlah produksi P1 dan P2 sehingga mendapatkan keuntungan yang maksimal.
2. Colourfull company memiliki sebuah pabrik yang menghasilkan cat, baik untuk interior maupun eksterior untuk mendistribusikan kepada para grosir. Dua bahan mentah A dan B dipergunakan untuk membuat cat tersebut. Ketersediaan maksimum bahan A adalah 6 ton per hari, ketersediaan maksimum bahan B adalah 8 ton per hari kebutuhan harian akan bahan mentah per ton cat interior dan eksterior digambarkan.

DAFTAR PUTAKA

18

Dimyati, Tjutju Tarliah dan Ahmad Dimyati. *Operations Research*: Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung. 2003.

26

Jay Heizer and Barry. *Operations Management (10th edition)*. New York, NY: Prentice Hall. Moon, Y. *2004*.

2

Siringoringo, Hotniar. Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear. Penerbit Graha Ilmu. Yogyakarta. 2005.

Tiro, Muhammad Arif. 2004. Pengenalan Manajemen Sains. Makassar: Andira Fublihser.

GLOSARIUM

Abjad	
A	*Additivity* (penambahan). Artinya aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu. Alternatif Optima adalah situasi dimana terdapat lebih dari satu solusi optimal.
B	
C	*Certainty*/kepastian adalah fungsi tujuan dan fungsi kendala sudah diketahui dengan pasti dan tidak berubah selama periode analisa corner point adalah titik-titik suduk pada area layak
D	*Divisibility* (bisa dibagi-bagi). Maksudnya solusi tidak harus merupakan bilangan integer (bilangan bulat), tetapi bisa juga berupa pecahan *Dual* adalah persoalan programa linier mempunyai suatu programa linier lain yang saling berkaitan
E	
F	*feasible region* adalah daerah yang menjadi potensi penyelesaian secara matematis
I	*Integer* adalah bilangan bulat *Iso profit line* merupakan garis selidik *Infeasibility* adalah suatu kondisi dimana tidak ada area layak yang memenuhi semua kendala.
O	*Optimum* adalah usaha memakasimalkan atau minimalkan
P	*Proportionality (proporsionalitas)* yaitu adanya proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala *Primal* adalah solusi pada persoalan semula
R	*Redundancy*. Constraint yang tidak mempengaruhi feasible region disebut redundant conctraint
U	*Unboundedness* adalah suatu kondisi dimana area layak tidak terbatas

Abdillah._2013._Program_Linear-halaman-3,18-181.pdf

ORIGINALITY REPORT

%33	%33	%2	%5
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	pembelajaranmatematikawan.blogspot.com Internet Source	%4
2	blogsiffahartas.blogspot.com Internet Source	%4
3	www.slideshare.net Internet Source	%2
4	ikrimash.blogspot.com Internet Source	%2
5	es.scribd.com Internet Source	%2
6	aturipanama.staff.telkomuniversity.ac.id Internet Source	%2
7	martinkoa.blogspot.com Internet Source	%1
8	mafiadoc.com Internet Source	%1
9	id.scribd.com Internet Source	%1

10	idoc.pub Internet Source	%1
11	thesis.binus.ac.id Internet Source	%1
12	renioktaviani9595.blogspot.com Internet Source	%1
13	staffnew.uny.ac.id Internet Source	%1
14	sumix88.blogspot.com Internet Source	%1
15	linearblogspot.blogspot.com Internet Source	%1
16	www.scribd.com Internet Source	%1
17	ml.scribd.com Internet Source	%1
18	jurnal.stikom.edu Internet Source	%1
19	senaresearch.blogspot.com Internet Source	%1
20	vhivie89.blogspot.com Internet Source	<%1
21	imronkuswandi.blogspot.com Internet Source	<%1

22	repository.usu.ac.id Internet Source	<%1
23	repository.its.ac.id Internet Source	<%1
24	rahmadi.staff.telkomuniversity.ac.id Internet Source	<%1
25	eprints.uny.ac.id Internet Source	<%1
26	www.ijbmi.org Internet Source	<%1
27	etheses.uin-malang.ac.id Internet Source	<%1
28	eprints.undip.ac.id Internet Source	<%1
29	dheedhune.blogspot.com Internet Source	<%1
30	amriconsulting.files.wordpress.com Internet Source	<%1
31	docplayer.info Internet Source	<%1
32	videnbota.blogspot.com Internet Source	<%1
33	docslide.us	

Internet Source

<1%

34	media.neliti.com	Internet Source	<1%
35	text-id.123dok.com	Internet Source	<1%
36	www.sundayana.web.id	Internet Source	<1%
37	teknikdesaindanmanufaktur.blogspot.com	Internet Source	<1%
38	philosophia-gun.blogspot.com	Internet Source	<1%
39	archive.org	Internet Source	<1%
40	nadyap57.blogspot.com	Internet Source	<1%
41	informatika.stei.itb.ac.id	Internet Source	<1%
42	id.123dok.com	Internet Source	<1%
43	theprong07.blogspot.com	Internet Source	<1%
44	digilib.unpas.ac.id	Internet Source	<1%

45	Leony Sisilia Arifin, Marline Paendong, Yohanes Langi. "Implementasi Model Transportasi pada Distribusi LPG (Liquid Petroleum Gas) 3 Kg di Sulawesi Utara", d'CARTESIAN, 2017 Publication	<% 1
46	suprionostg.blogspot.com Internet Source	<% 1
47	saynenkonk.blogspot.com Internet Source	<% 1
48	ucupmudzaki.blogspot.com Internet Source	<% 1
49	Submitted to State Islamic University of Alauddin Makassar Student Paper	<% 1
50	mediapenyuluhanperikananpati.blogspot.com Internet Source	<% 1
51	dinus.ac.id Internet Source	<% 1
52	K-Z Chen. "Virtual genes of manufacturing products and their reforms for product innovative design", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 01/01/2004 Publication	<% 1